

Р. РАФАТОВ, А. АСАНОВ, М. Ш. МАМАЮСУПОВ



Бөрүбаев А.А.

# Жогорку математика боюнча окума

4-бөлүк

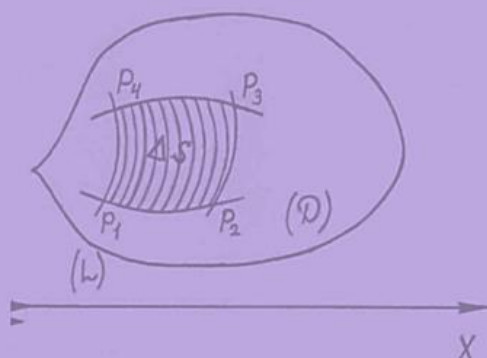
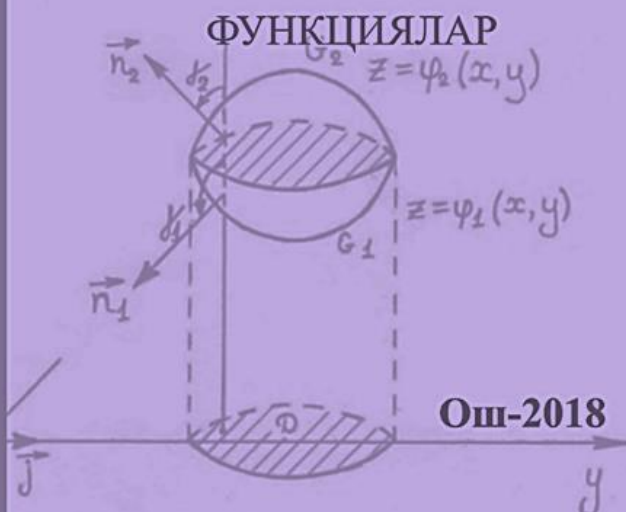
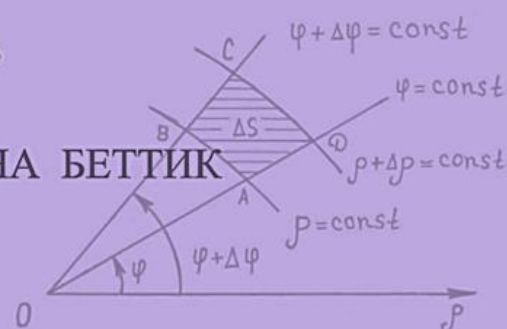
Электрондук окуу китеп

• ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАР

• ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ЖАНА БЕТТИК

ИНТЕГРАЛДАР

• КОМПЛЕКСТИК ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ



УДК 51

ББК 22.11

Р 26

Китеп Ош мамлекеттик университетинин «Жогорку математика» кафедрасында даярдалып, Билим берүү жана Илим министрлигинин № 1107|1 (25.12.14) буйругу менен расмий окуу китеби катарында таанылган.

Редактору: п.и.к., доцент А.Аттокурова

Рецензенттер: ф.-м.д., профессорлор Ж.Сатаров, И.Ташполотов

Окумалардын топтомун жазгандар Рафатов Р., Асанов А., Мамаюсупов М. Ш.

Р 26 Жогорку математика боюнча окума (4– бөлүк): Электрондук окуу китеби. – Ош: 2014, 2018, 2022. – 257 б.

ISBN 978 – 9967 – 18 – 001 – 7

«Жогорку математика боюнча окума» электрондук окуу китебинин 4 – бөлүгү, жогорку окуу жайларда окутулуучу матанализ, комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялар, жогорку жана колдонмо математика сабактарын өздөштүрүүчү студенттерге жана окутуучуларга арналган. [Электрондук китепти ОшМУ нун жана \[www.okuma.kg\]\(http://www.okuma.kg\) сайттарынан окууга болот.](#)

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүнүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика кафедрасы.

Электрондук дарек: [mamaiusupov.m@gmail.com](mailto:mamaiusupov.m@gmail.com)

Р 1602010000 – 14

УДК 51

ISBN 978 – 9967 – 18 – 001 – 7

ББК 22.11

@ Рафатов Р., Асанов А., Мамаюсупов М.Ш., 2014

*Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.*

**Галилей**

## Мазмуну

XV ГЛАВА. ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАР .....	7
§ 15.1 Кош интеграл аппаратын түзүлүшү .....	7
15.1.1 Кош интегралдын келип чыгуусуна түрткү болгон мисалдар. Кош интегралдын аныктамасы .....	7
15.1.2 Кош интегралдын жашоо шарттары жана негизги касиеттери.....	11
§ 15.2 Кош интегралды кайталануучу интегралдарга келтирүү .....	16
15.2.1 $D$ областы тик бурчтук болгон учур.....	16
15.2.2 $D$ областы эркин формада болгон учур.....	18
1. Мисалдар.....	22
§ 15.3 Кош интегралда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу .....	26
15.3.1 Жалпак областтарды өзгөртүп түзүү.....	26
15.3.2 Чагылтылган фигуралардын аяттарын арасындагы байланыштар. Якобиан жана анын геометриялык мааниси.....	28
15.3.3 Кош интегралдарда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу эрежеси .....	31
15.3.4 Кош интегралды полярдык координаталарда эсептөө .....	35
§ 15.4 Беттин аянтын эсептөө.....	38
§ 15.5 Үчтүк интеграл жана аны түзүүгө түрткү болгон практикалык мисалдар .....	44
15.5.1 Материалдык телонун массасын эсептөө. Үчтүк интегралдын аныктамасы .....	44
15.5.2 Үчтүк интегралдардын касиеттери .....	46
15.5.3 Үчтүк интегралды декарттык координаталарда эсептөө.....	48
15.5.4 Үчтүк интегралды цилиндрдик координаталарда эсептөө.....	51
15.5.5 Үчтүк интегралды сфералык координаталарда эсептөө.....	54
§15.6 Үчтүк жана кош интегралдардын айрым колдонулуштары.....	57
I. Жалпак фигуранын массасы .....	57
II. Жалпак фигуралардын координаттык окторго салыштырмалуу статикалык моменттери. Оордук борбордун координаталары .....	58
III. Жалпак фигуралардын координаттык окторго салыштырмалуу инерция моменттери .....	61
IV. Телолордун массаларын эсептөө .....	62
V. Телолордун координаттык тегиздиктерге салыштырмалуу статикалык моменттери. Оордук борборлору .....	63

§ 15.7 Чектелбеген областтар боюнча эселүү интегралдарды эсептөө .....	65
Көнүгүүлөр .....	67
XVI ГЛАВА. ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ЖАНА БЕТТИК ИНТЕГРАЛДАР .....	71
§ 16.1 Биринчи түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интегралдар.....	71
16.1.1 I – түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интеграл аппаратын түзүү .....	71
16.1.2 I – түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интегралдын жашоо шарттары.....	73
16.1.3 I – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдардын негизги касиеттери.....	75
16.1.4 I – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды эсептөө .....	76
§ 16.2 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдар .....	79
16.2.1 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын аныктамасы .....	79
16.2.2 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды эсептөө .....	81
16.2.3 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын касиеттери .....	83
16.2.4 Гриндин формуласы.....	85
§ 16.3 Ийри сызыктуу интегралдардын колдонулуштары .....	91
16.3.1 Ийринин массасы .....	91
16.3.2 Цилиндрдик беттин аянты.....	91
16.3.3 Күчтүн жумушу .....	94
§ 16.4 Интегралдоо жолунан көз каранды болбогон ийри сызыктуу интегралдар .....	97
16.4.1 Интегралдоо жолунан көз каранды эместиктин шарттары .....	97
16.4.2 Толук дифференциал болуу белгилери. Тик бурчтуу областта алгачкы функцияны табуу .....	102
§ 16.5 Беттин аянты боюнча алынган I – түрдөгү (роддогу) кош интеграл. Материалдык беттин массасы .....	108
§ 16.6 II – түрдөгү беттик кош интегралдар .....	114
16.6.1 Мейкиндиктерде беттердин багыттарын аныктоо эрежелери .....	114
16.6.2 II - түрдөгү беттик кош интегралдардын аныктамасы.....	116
16.6.3 II – түрдөгү беттик кош интегралдын вектордук формада жазылышы .....	118
16.6.4 Туяк формадагы бет боюнча вектордук агым. Гаусс – Остроградскийдин формуласы .....	120
Мисалдар.....	125
16.6.5 Вектордук талаанын циркуляциясы. Вектордун ротору. Стокстун формуласы .....	132
Көнүгүүлөр .....	138
XVII - ГЛАВА. КОМПЛЕКСТИК ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАР .....	143
§ 17.1 Комплекстик тегиздиктеги областтар жана функциялар .....	143
17.1.1 Комплекстик сандардын көптүгү .....	143
1 – КӨНҮГҮҮЛӨР.....	149

17.1.2	Комплекстик сандардын удаалаштыгы.....	150
17.1.3	Комплекстик өзгөрүлмөлүү функция.....	152
2	– КӨНҮГҮҮЛӨР.....	155
17.2.	МАСЕЛЕЛЕР (№ 2 тапшырма).....	157
17.1.4	Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардын предели, үзгүлтүксүздүгү.....	159
§17.2	Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардан туунду алуу эрежелери. Аналитикалуулук шарты .....	162
17.2.1	Функциянын чекиттеги туундусу .....	162
17.2.2	Коши – Римандын шарттары.....	164
	Мисалдар.....	167
17.2.3	Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциянын туундусунун геометриялык мааниси. Конформдуу чагылтуулар .....	175
§ 17.3	Элементардык функциялардын конформдуулугу.....	178
	$w = a z + b$ сызыктуу функциясы .....	178
II.	$w = f z = z^n$ ( $n > 1, n \in \mathbb{N}$ ) – даражалуу .....	178
III.	Бөлчөктүү-сызыктуу $w = f(z) = \frac{a z + b}{c z + d}$ .....	179
IV.	Жуковскийдин функциясы.....	180
V.	$w = e z$ – экспонента ( $\exp z$ ) функциясы.....	187
VI.	Логарифмалык функция.....	188
VI.	Тригонометриялык жана гиперболалык функциялар.....	189
§ 17.4	Комплекстик өзгөрүлмөлөр боюнча интегралдоо. Кошинин теоремасы. Кошинин интегралдык формуласы.....	191
17.4.1	Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциядан ийри боюнча алынган интеграл .....	191
	Мисалдар.....	193
17.4.3	Аналитикалык функциялардын бардык тартиптеги туундуларын жашашы.....	201
	Мисалдар.....	202
4	– КӨНҮГҮҮЛӨР.....	204
17.5.1	Комплекстик катарлар жөнүндө жалпы түшүнүктөр .....	205
	Мисалдар.....	206
17.5.2	Даражалуу катарлар .....	207
5	- КӨНҮГҮҮЛӨР .....	210
	МАСЕЛЕЛЕР ( № 4 тапшырма).....	211
17.5.3	Тейлордун катары .....	214
17.5.4	Аналитикалык функциянын нөлдөрү .....	217

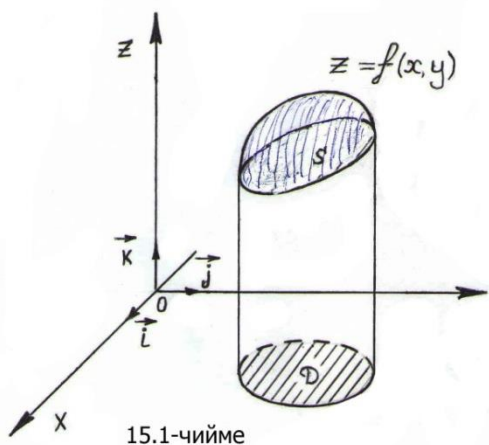
Мисалдар.....	218
КӨНҮГҮҮЛӨР.....	220
§ 17.6 Лорандын катарлары. Обочолонгон өзгөчө чекиттер жана аларды классификациялоо .....	221
17.6.1 Лорандын катарлары.....	221
Мисалдар.....	222
КӨНҮГҮҮЛӨР.....	231
МАСЕЛЕЛЕР ( № 5 тапшырма).....	232
17.6.2 Функциянын обочолонгон өзгөчө чекити.....	235
Мисалдар.....	236
§ 17.7 Функциянын ресидиси (Residi) .....	239
Мисалдар.....	242
17.7.1 Функциянын чексиз алыстатылган чекитке карата ресидиси.....	245
17.7.2 Ресидилердин айрым анык интегралдарды эсептөөдөгү колдонулуштары .....	248
КӨНҮГҮҮЛӨР.....	251
МАСЕЛЕЛЕР( № 6 - тапшырма) .....	252
МАСЕЛЕЛЕР ( № 7 тапшырма ).....	253

## XV ГЛАВА. ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАР

### § 15.1 Кош интеграл аппаратын түзүлүшү

#### 15.1.1 Кош интегралдын келип чыгуусуна түрткү болгон мисалдар. Кош интегралдын аныктамасы

$R$  мейкиндигиндеги  $[a, b]$  кесиндиси боюнча алынган  $\int_a^b f(x)dx$  интегралы сызыктуу интеграл деп аталат, анткени интегралдоо өзгөрүлмөсү  $x \in [a, b] \subset R$  сызыктуу мейкиндикке элемент болот. Ошондуктан сызыктуу интеграл, бир өлчөмдүү мейкиндикте аныкталган  $f(x)$  функциялары менен сүрөттөлгөн кубулуштар менен



предметтерди гана, математикалык тилде моделдештирип, таанып үйрөнүүдө колдонулган. Ал эми интегралдоо өзгөрүлмөлөрү  $R^2$ ,  $R^3$ , ...  $R^n$  мейкиндиктердеги, өлчөмүн эсептөөгө мүмкүн болгон чектелген областарга таандык болсо, анда көп өзгөрүлмөлүү функциялар үчүн эки (кош), үч, төрт, ...,  $n$ , ... эселүү интегралдар деп аталган жаңы математикалык аппараттарды түзүүгө

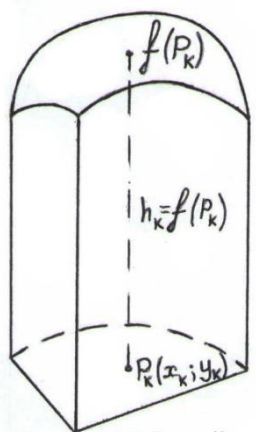
болот. Эселүү интегралдар, көп өлчөмдүү мейкиндиктердеги сызыктуу интегралдардын жалпыланышы болуп, ошол мейкиндиктердеги телолордун майда бөлүкчөлөрүндөгү билги – маалыматтарды суммалап кураштырып, бүтүндөй тело боюнча жалпы бир тыянак – билгиге ээ болуу усулу болот. Ушундай ыкма менен изилдөөнү талап кылган көптөгөн практикалык маселелер болгону менен, алардын ичинен эселүү интеграл түшүнүгүн келип чыгуусуна түрткү болгон геометриялык мисалдардын бирине токтолуп өтөлү.

$R^2$  мейкиндигинде тургузулган тик бурчтуу  $xOy$  Декарттык координаталар системасын туюк  $D$  областында аныкталган  $z = f(x, y)$  эки өзгөрүлмөлүү функциясы берилип, анын графиги  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан тик бурчтуу  $Oxyz$  координаталар системасында  $S$  бети катарында сүрөттөлсүн (15.1 – чийме). Бул учурда  $R^3$  мейкиндигинде:

1) төмөн жагынан  $D$  областы,

2) жогору жагынан  $S$  бети,

2) каптал жагынан  $D$  областынын чек арасынан башталып  $S$  бетин чек ара чекиттеринде бүтүп,  $Oz$  аппликата огуна параллель шоола – түзүүчүлөр менен чектелген **цилиндрдик тело** деп аталган фигура түзүлөт (15.1 – чийме). Цилиндрдик телону каптап турган бетти цилиндрдик бет дейбиз. Мындан ары  $D$  областын аянты чектелген же эсептелүүчү (квадратталуучу), б.а. борбору координаталар башталмасында жайгашкан бир байламталуу, кандайдыр бир тегеректин ичинде жайгаштырууга мүмкүн болгон, туюк область деп эсептейбиз.



15.2-чийме

Айталы  $z = f(x, y)$  функциясы,  $D$  областынын ар бир  $P(x; y)$  чекиттеринде үзгүлтүксүз жана  $f(P) = f(x, y) \geq 0$  оң болсун, б.а. функциянын графиги  $xOy$  координаттык тегиздигин жогору жагында жайгашкан цилиндрдик бет болсун. Цилиндрдик телонун көлөмүн  $V$  деп белгилеп, аны эсептөө милдетин коёлу.

Цилиндрдик телонун негизи болгон  $D$  областын  $n$  сандагы, жетишерлик көп, өз ара кесилишпеген, квадратталуучу эркин формадагы майда бөлүкчө областарга бөлөлү. Бул бөлүкчөлөрдү номерлеп, ар бирин  $D_1, D_2, \dots, D_n$  тамгалары менен, ал эми алардын аянттарын тиешелүү түрдө  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  деп белгилейли. Ар бир  $D_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) бөлүкчө областарын чек ара сызыктарынан  $Oz$  огуна параллель түзүүчү шоолаларды жүргүзүп цилиндрдик беттерди түзсөк, анда цилиндрдик тело  $n$  сандагы бөлүкчө цилиндрдик телолорго бөлүнгөнүнө күбө болобуз. Цилиндрдин көлөмү негизин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар болгондуктан,  $k$  – бөлүкчө (15.2 – чийме) цилиндрдик телонун  $D_k$  негизин аянтын  $\Delta S_k$ , ал эми бийиктигин  $D_k$  негизинен эркин тандалган кайсы бир  $P_k(x_k; y_k) \in D_k$  чекитиндеги  $f(x, y)$  функциясын  $h_k = f(P_k) = f(x_k, y_k)$  мааниси десек, анда анын көлөмүн  $\Delta V_k = f(P_k) \Delta S_k$  көрүнүштө эсептөөгө болот.



Мында,  $k$  – бөлүкчө цилиндрдик телонун көлөмү жакындаштырылып, жогорку негиздеги  $z = f(x, y)$  бетинин бөлүгүн ордуна, ага ичинен (же сыртынан) капталган  $z = h_k = f(P_k)$  тегиздиги менен цилиндрдик беттин кесилиш бөлүгү коюлган, башка бир бөлүкчө цилиндрченин көлөмү алынды.

Ошентип жалпы цилиндрдик телону, жогорку негиздери  $z = h_k$  маанилерине жараша тепкич сыяктуу тегиздиктердин бөлүктөрүнөн турган  $n$  сандагы бөлүкчө цилиндрдик телолордун биригүүсү же капталуусу катарында эсептесек, анда жалпы көлөмдү жакындаштырып

$$V \approx V_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k \quad (1)$$

тепкич сыяктуу абалдарда жайгашкан бөлүкчө цилиндрдик телолордун көлөмдөрүн суммасы көрүнүштө эсептөөгө болот.

Бөлүүлөр көбөйгөн сайын, кандай формада болгонуна карабай  $D_k$  бөлүкчө областар кичинерип,  $D_k$  бөлүкчөлөрүнөн  $P_k$  чекиттерин кандай тандаганыбызга карабастан,  $h_k = f(P_k)$  бийиктиктери  $k$  – бөлүкчө цилиндрдик телолордун бийиктигине жакындап баргандыктан,  $n \rightarrow \infty$  умтулганда  $V_n$  көлөмү изделүүчү  $V$  көлөмүнө чексиз жакындап барат. Бул пикирди ырастоо үчүн кошумча бышыктоолорду жүргүзөлү.

$D_k$  бөлүкчө областын диаметри деп, ага таандык болгон бардык  $P, Q \in D_k$  чекиттерин арасындагы  $\rho(P, Q)$  аралыктарын эң узунун

$\text{diam } D_k = \sup_{P, Q \in D_k} \{\rho(P, Q)\}$  алып, бардык  $D_k$  областарын диаметрлерин

салыштырып, алардын эң узунун  $d = \sup_{1 \leq k \leq n} \{D_k\}$  деп белгилесек,

$n \rightarrow \infty \Leftrightarrow d \rightarrow 0$  тең күчтүү болорун көрөбүз.

$D$  областында аныкталган  $z = f(x, y)$  функциясы берилсе, анда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k \quad (2)$$

$D$  областын  $n$  сандагы  $D_k$  бөлүкчөлөргө бөлүүгө жана  $P_k(x_k; y_k) \in D_k$  чекиттерин тандоого жараша,  $D$  областы боюнча  $f(x, y)$  функциясына карата, ар башка (2) интегралдык суммаларды түзө алабыз.

**15.1 Аныктама.** Эгерде  $d \rightarrow 0$  умтулганда, кандай ыкмада  $D$  областын  $n$  сандагы  $D_k$  бөлүкчөлөргө бөлүүгө жана  $P_k(x_k; y_k) \in D_k$  чекиттерин тандоого көз каранды болбостон (2) – интегралдык суммалардын чектүү предели жашаса, анда бул пределдин мааниси  $z = f(x, y) = f(P)$  функциясынан  $D$  областы боюнча алынган кош интеграл деп аталып,

$$\iint_D f(P) ds \quad \text{же} \quad \iint_D f(x, y) dx dy \quad (3)$$

көрүнүштөгү символдор менен белгиленет.

Ошентип, кош интеграл

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k = \iint_D f(P) ds \equiv \iint_D f(x, y) dx dy \quad (4)$$

эрежеси менен эсептелип,  $f(P) ds$  – интеграл алдындагы туюнтма,  $ds = dx dy$  – тик бурчтуу координаталар системасындагы аянттын элементи же дифференциалы,  $D$  – интегралдоо областы, координаталары  $(x; y)$  болгон  $P$  чекити – интегралдоонун өзгөрүлмө чекити деп аталышат. Бул учурда, интеграл алдындагы  $f(x, y)$  функциясы  $D$  областында интегралдануучу деп аталат.

Кош интегралдын 15.1 – аныктамасына жана (1), (4) теңдештиктерине таянып,  $f(x, y) \geq 0$  оң болгон учурда цилиндрдик телонун көлөмү:

$$V = \iint_D f(P) ds \equiv \iint_D f(x, y) dx dy \quad (5)$$

формулалары менен эсептелет деген геометриялык тыянакка келебиз.

Эгерде  $D$  интегралдоо областында  $f(P) = f(x, y) \leq 0$  терс маанилерге ээ болсо, анда цилиндрдик телонун көлөмүн

$$V = - \iint_D f(P) ds \equiv - \iint_D f(x, y) dx dy \quad (6)$$

эрежеси менен эсептөөгө болорун байкайбыз. Бул учурда цилиндрдик тело,  $xOy$  тегиздигин төмөн жагында жайгашкан болот.

Эгерде  $D$  областында  $f(x, y)$  функциясы оң жана терс маанилерге ээ болсо, анда цилиндрдик телонун көлөмүн  $xOy$  тегиздигин жогору жагындагы бөлүгүн көлөмүн (5) эрежеси, ал эми төмөн жагындагы бөлүгүн (6) эрежеси менен эсептеп, жалпы көлөмдү, эки көлөмдөрдүн алгебралык суммасы катарында табабыз.

### 15.1.2 Кош интегралдын жашоо шарттары жана негизги касиеттери

15.1 – аныктамага ылайык, кош интегралдын жашоо шарттары пределдин жашоо шарттарынан келип чыккандыктан, (2) суммасын чектелген болушу негизги шарт болуп эсептелет. Ошондуктан кош интегралдын жашоосун жетишерлик шарттарын төмөндөгү теоремалар менен берүүгө болот.

**15.1 Теорема.** *Эгерде чектелген жана туюк  $D$  областында  $f(x, y)$  функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда ушул областта интегралдануучу болот.*

► Чынында эле  $f(x, y) \in C[D]$  болсо, анда 8.5 – теоремасын (II – бөлүк) негизинде чектелген функция болуп,  $D$  туюк областында эң чоң  $M$  жана эң кичине  $m$  маанилерине жетет ( $m \leq f(x, y) \leq M$ ). Экинчи жактан  $D$  квадратталуучу область болгондуктан, анын чектүү

$$S_D = \sum_{k=1}^n \Delta S_k \quad (7)$$

аянты эсептөөгө болот. Ошондуктан (4) эсептөө эрежесинен,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k \leq M \cdot \sum_{k=1}^n \Delta S_k = M \cdot S_D$$

чектүү пределдин табылышы же кош интегралдын жашашы келип чыгат. ◀

Далилденген теоремадан  $f(x, y)$  функциясын чектелген болушу, интегралдык сумманын чектүү пределдин табылышына чоң өбөлгө түзөт. Ошондуктан 15.1 – теореманын шарттарын бир аз жеңилдетүүгө болот. Ал үчүн аянты нөлгө барабар болгон чекиттердин көптүгү деген түшүнүк киргизебиз: *Эгерде тегиздиктеги кайсы бир чекиттердин көптүгүн, жетишерлик кичине деп эсептелген көп бурчтук формасындагы фигуранын ичине толук камтуу мүмкүн болсо, анда мындай чекиттердин көптүгүн аянтын нөлгө барабар деп эсептейбиз.*

**15.2 Теорема.** *Эгерде чектелген туюк  $D$  областын чекиттеринде  $f(x, y)$  функциясы чектүү маанилерге ээ болсо жана  $D$  областын айрым бир аянты нөлгө барабар болгон чекиттеринен башка, дээрлик бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, анда ал  $D$  областында интегралдануучу болот.*

Анык интеграл сыяктуу эле кош интегралдын негизги касиеттери да пределдин касиеттеринен келип чыккандыктан, кош интеграл да бир өзгөрүлмөлүү функциялардын анык интегралдарына (12.1.4 – темасын кара) окшош, же аларды  $R^2$  мейкиндигинде жалпылаган касиеттерге ээ болот. Ошондуктан аларды далилдөөсүз кабыл алабыз.

### 1<sup>0</sup>. Сзыктуулук касиети

Эгерде  $f(P)$  жана  $\varphi(P)$  функциялары  $D$  областында интегралдануучу болушса, анда  $\forall \alpha, \beta \in R$  үчүн  $\alpha \cdot f(P) + \beta \cdot \varphi(P)$  функциясы да  $D$  областында интегралдануучу болуп, кош интеграл

$$\iint_D [\alpha \cdot f(P) + \beta \cdot \varphi(P)] ds = \alpha \cdot \iint_D f(P) ds + \beta \cdot \iint_D \varphi(P) ds \quad (8)$$

көрүнүштө эсептелет. Бул касиеттин тууралыгы пределдин касиетинен келип чыгат.

## 2<sup>0</sup>. Барабарсыздыктарды интегралдоо

Эгерде  $f(P)$  жана  $\varphi(P)$  функциялары  $D$  областында интегралдануучу болушса жана  $D$  областын бардык  $P$  чекиттеринде  $f(P) \leq \varphi(P)$  барабарсыздыгы аткарылса, анда кош интеграл алууда да

$$\iint_D f(P) ds \leq \iint_D \varphi(P) ds \quad (9)$$

барабарсыздык сакталат, б.а. кош интеграл алуудан барабарсыздыктар бузулбайт.

Бул касиеттин негизинде,  $D$  областы боюнча

$-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)|$  барабарсыздыгынан кош интеграл алууда

$$-\iint_D |f(P)| ds \leq \iint_D f(P) ds \leq \iint_D |f(P)| ds \quad (10)$$

барабарсыздык сакталгандыктан,

$$\left| \iint_D f(P) ds \right| \leq \iint_D |f(P)| ds \text{ барабарсыздыгы орун алары келип чыгат.}$$

## 3<sup>0</sup>. Жалпак фигуранын аянты

$R^2$  мейкиндигинде жайгашкан  $D$  областында (жалпак фигура) аныкталган функцияны  $f(P) \equiv 1$  көрүнүштөгү турактуу сан десек ( $P \in D$ ), анда бул функциядан  $D$  областы боюнча алынган кош интеграл,  $D$  – жалпак фигурасын  $S_D$  аянтына барабар болот

$$S_D = \iint_D ds. \quad (11)$$

Чынында эле,  $f(P) \equiv 1$  болгондо 15.1 – аныктамасына ылайык

$$\iint_D 1 \cdot ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \left| \begin{matrix} (7) - \text{нин} \\ \text{негизинде} \end{matrix} \right| = S_D$$

келип чыгып, (11) дин туура экендигине ишенебиз.

#### 4<sup>0</sup>. Кош интегралды баалоо

Айталы, чектелген туюк  $D$  областында  $f(P)$  функциясы үзгүлтүксүз болуп,  $D$  областында эң чоң  $M$ , эң кичине  $m$  маанилерине жетсин жана  $S_D$  саны  $D$  областын аянты болсун, анда

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(P) ds \leq M \cdot S_D \quad (12)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Бул касиет 12.1.4 – темасындагы (10) формуласын (3 – бөлүк) жалпыланышы болуп эсептелет.

#### 5<sup>0</sup>. Адитивдүүлүк касиети

Эгерде  $D$  областында  $f(P)$  функциясы интегралдануучу болсо жана  $D$  областы өз ара жалпы ички чекиттерине ээ болбогон эки  $D = D_1 \cup D_2$  областарына бөлүнсө, анда  $f(P)$  функциясы  $D_1, D_2$  областарында да интегралдануучу болуп,

$$\iint_D f(P) ds = \iint_{D_1} f(P) ds + \iint_{D_2} f(P) ds \quad (13)$$

теңдештиги орун алат.

#### 6<sup>0</sup>. Орточо маани жөнүндөгү теорема

**15.3 Теорема.** Эгерде чектелген туюк  $D$  областында  $f(P)$  функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда  $D$  областынан жок дегенде бир  $P_c$  чекити табылып,

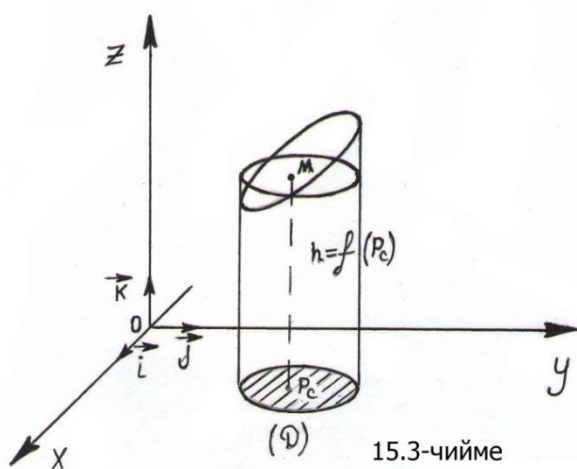
$$\iint_D f(P) ds = f(P_c) \cdot S_D \quad (14)$$

кош интегралын эсептөө эрежеси орун алат. Мында  $S_D$  саны  $D$  областынын аянты.

► Чектелген туюк  $D$  областында  $f(P)$  функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, ушул областта өзүнүн эң чоң  $M$ , эң кичине  $m$  маанилерине жетет жана кош интеграл жашап, (12) барбарсыздыктары аткарылат. (12) ни  $S_D$  оң санына бөлүп жиберсек,

$$m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(P) ds \leq M \text{ келип чыгат. Ошентип } \frac{1}{S_D} \iint_D f(P) ds$$

саны, функциянын эң чоң  $M$  жана эң кичине  $m$  маанилерин арасында жайгашкан кайсы бир чекит (сан) болот.  $f(P)$  функциясы  $D$



областында үзгүлтүксүз болгондуктан, анын маанилери  $[m, M]$  кесиндисин жылчыксыз толтурат, анда жогоруда айтылган  $\frac{1}{S_D} \iint_D f(P) ds$  саны да,  $f(P)$  функциясын  $D$  областында жайгашкан, кайсы бир  $P_c$  чекитиндеги мааниси болуп эсептелет (мындай чекиттер бир канча болсо, анда бул чекиттерде

функциянын маанилери барабар болушат). Демек,

$$\frac{1}{S_D} \iint_D f(P) ds = f(P_c) \Leftrightarrow \iint_D f(P) ds = f(P_c) \cdot S_D \quad (15)$$

же  $\iint_D f(P) ds = f(P_c) \cdot \iint_D ds$  орун алып, бул касиет далилденет.

(15) формуласы менен аныкталган  $f(P_c)$  саны,  $f(P)$  оң функциясын  $D$  областындагы орточо мааниси деп аталып, геометриялык жактан  $D$  областынан жок дегенде бир  $P_c$  чекити табылып, көлөмү берилген цилиндрдик телонун көлөмүнө тең болгон, негизи ошол эле  $D$  областы, бийиктиги  $h = f(P_c)$  санына барабар, башка бир орточо деп алынган цилиндрдик телону тургузуу мүмкүн деп чечмеленет (15.3 – чийме). Ошентип, (14) теңдештигин сол жагында

берилген цилиндрдик телонун көлөмү турса, оң жагында табылган  $P_c$  санына жараша бийиктиги  $h = f(P_c)$  болгон, орточо деп алынган кошумча цилиндрдик телонун көлөмү турат. ◀

## § 15.2 Кош интегралды кайталануучу интегралдарга келтирүү

### 15.2.1 $D$ областы тик бурчтук болгон учур

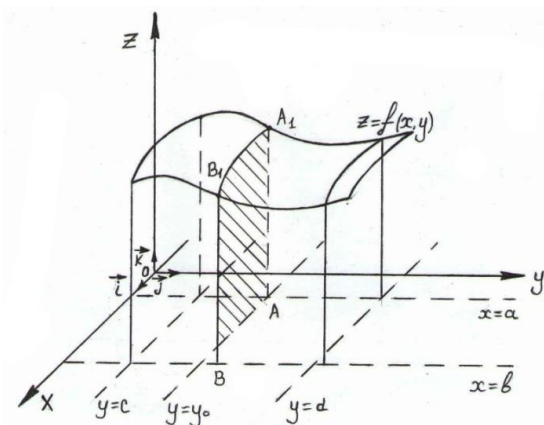
Айталы,  $D$  областы  $\Pi = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  көрүнүштөгү туюк тик бурчтук болуп, ушул тик бурчтукта  $f(x, y)$

үзгүлтүксүз функциясы берилсин дейли. Анда бул тик бурчтук боюнча  $f(x, y)$  функциясынан алынган кош интеграл, төмөнкү негизи  $\Pi$  – тик бурчтугу, жогорку негизи  $z = f(x, y)$  бети менен чектелген цилиндрдик телонун көлөмү болору белгилүү

$$V = \iint_{\Pi} f(P) ds \equiv \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy. \quad (16)$$

Бул цилиндрдик телонун көлөмүн

эсептөө жолдорун издеп көрөлү. Ал үчүн сөз кылынган цилиндрдик телону тургузуп (15.4 – чийме), аны



15.4-чийме

$c \leq y_0 \leq d$  кесиндиси аркылуу өткөн  $Oy$  огуна перпендикуляр  $y = y_0$  тегиздиги аркылуу кесели. Натыйжада цилиндрдик тело, аянты

$$S(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx \quad (17)$$

интегралдын сандык маанисине барабар болгон  $ABB_1A_1$  ийри сызыктуу трапеция менен кесилет. (17) анык интегралы  $x$  өзгөрүлмөсү боюнча алынып,  $y_0$  убактылуу кыймылы токототулган (фиксирленген)



турактуу сан деп эсептелгени менен, тандалган  $y_0$  санына жараша мааниси өзгөрүп тургандыктан, жалпы учурда (17) интегралын

$$S(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (18)$$

көрүнүштөгү функция деп кароого туура келет. Андай болсо цилиндрдик телонун көлөмүн,  $y$  өзгөрүлмөсү  $c \leq y \leq d$  аралыгында өзгөргөн кездеги ийри сызыктуу трапециялардын аянттарын суммасы катарында,

$$V = \int_c^d S(y) dy \quad (19)$$

интегралын маанисине брабар десек болот. Экинчи жактан цилиндрдик телонун көлөмү, (16) формуласы менен эсептелгендиктен, аны (19) менен теңдештирип, кош интегралды кезектешип

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d S(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

эсептөө эрежесине ээ болобуз. Бул эрежени

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (20)$$

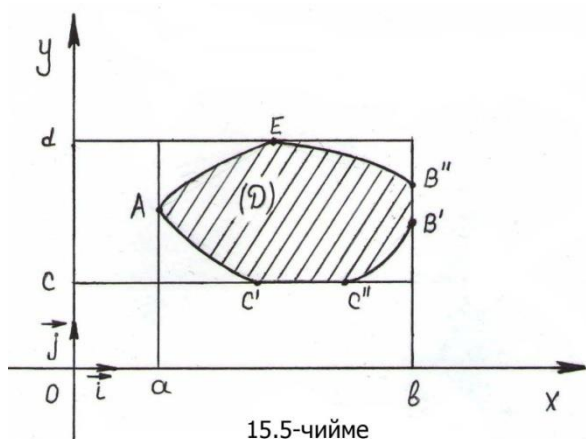
кайталанма интегралдар көрүнүшүндө жазуу кабыл алынган.

Ошондой эле цилиндрдик телону  $Ox$  огуна перпендикуляр  $x = x_0$  тегиздиги менен кесип, жогорудагыдай талкуулардун негизинде

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \text{ же}$$

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (20^A)$$

эрежесине табууга болот. Табылган (20), (20<sup>A</sup>) эрежелерин оң жагында,



15.5-чийме

кезеги менен удаалаш түрдө, бир өзгөрүлмө боюнча алынган эки анык интегралдар турганын байкайбыз, анткени экинчи өзгөрүлмө убактылуу кыймылы токтотогон (фиксирленген) турактуу сан катары гана катышат. Ошентип, туюк  $\Pi$  тик бурчтугунда үзгүлтүксүз болгон  $f(x, y)$  функциясынан тик бурчтук боюнча

кош интеграл эсептөөнү, **кайталануучу интегралдар** деп аталган (20), (20<sup>A</sup>) эрежелери менен ишке ашырууга болот. Эки учурда тең барабардыктардын сол жагындагы кош интегралдын мааниси өзгөрүлбөй кала бергендиктен, интегралдоо өзгөрүлмөлөрүн кезегин алмаштырууда кайталануучу интегралдын мааниси сакталат.

Мисалы, 1)  $z = x^2 + y^2$  функциясын

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  тик бурчтугу боюнча кош интегралын эсептегиле.

►  $z = x^2 + y^2$  функциясы берилген туюк тик бурчтуктун бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз, ошондуктан (20) формуласын колдонуп,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^1 \right] dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \left( \frac{1}{3} y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{жообуна ээ болобуз.} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

### 15.2.2 $D$ областы эркин формада болгон учур

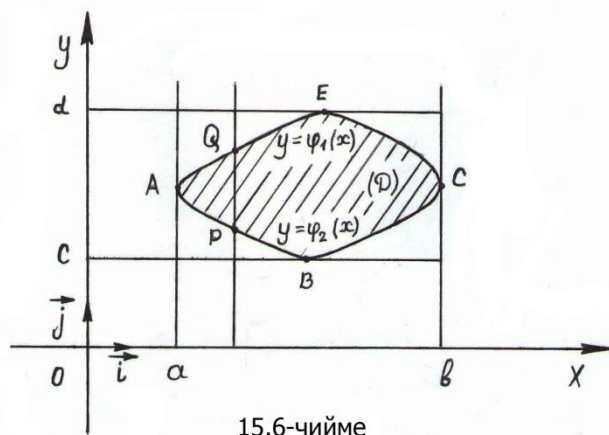
Декарттык координаталар системасын  $xOy$  тегиздигинде эркин

формада жайгашкан чектелген жана туюк, квадратталуучу  $D$  областы берилип,  $Oy$  огуна параллель болгон

$x = \text{const}$  ( $a < x < b$ ) түзү төмөндөгү шартка баш ийсин:

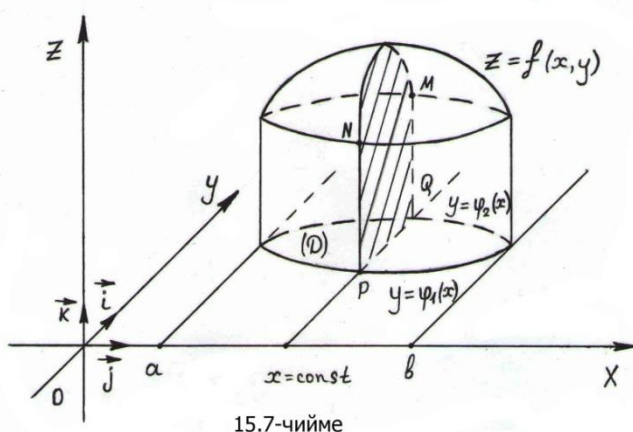
1)  $x = \text{const}$  түзү  $D$  областын чек арасын экиден ашык эмес чекиттерде гана кесип өтө алат,

2) болбосо кесүүчү  $x = \text{const}$  түзү, чек ара сызыгын кайсы бир бөлүгү менен дал келет (15.5 – чийме).



Коюлган шартты эске алсак, анда  $D$  областын  $Ox$  огундагы ортогоналдык проекциясы, кандайдыр бир  $[a, b]$  кесиндисин, ал эми  $Oy$  огундагы ортогоналдык проекциясы  $[c, d]$  кесиндисин түзөрүн көрөбүз.  $D$  областын, координаттык октордогу ортогоналдык

проекциялары болушкан кесиндилердин жардамы менен,  $D$  областын толугу менен өзүнө камтып турган  $\Pi = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  тик бурчтугун кура алабыз (15.6 – чийме).  $\Pi$  тик бурчтугун  $x = a$ ,  $x = b$  жактарын жанып өткөн  $D$  областын чек арасынан, эки  $A$  жана  $C$  чекиттерин алабыз. Шартка ылайык алар экиден ашык боло албайт, андай болбосо  $Oy$  огуна параллель түздөр,  $D$  нын чек арасын экиден ашык чекиттерде кесип өтүп калмак. Алардын жардамы менен чек ара



сызыгын, эки  $ABC$  жана  $AEC$  ийрилерине бөлөбүз. Шарт боюнча бул ийрилердин ар бири  $Oy$  огуна параллель түздөр менен бирден ашык чекиттерде кесилише албайт. Ошондуктан ал ийрилердин теңдемелерин  $y$  ке карата бир маанилүү

$$\begin{aligned} (ABC): y &= \varphi_1(x), \\ (AEC): y &= \varphi_2(x), \end{aligned} \quad a \leq x \leq b \quad (21)$$

көрүнүштөрдө чечүүгө болот.

Айталы,  $D$  областында кандайдыр бир  $z = f(x, y)$  үзгүлтүксүз функциясы берилип, цилиндрдик телону аныктасын. Цилиндрдик телону  $x = const$  ( $a \leq x \leq b$ ) тегиздиги менен кесели. Кесилиште PQMN ийри сызыктуу трапециясы пайда болуп, анын аянтын бир гана  $y$  өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болду деп эсептелген  $f(x, y)$  функциясынан анык интеграл алуу менен эсептөөгө болот (15.7 – чийме). PQMN менен  $D$  областы, (21) чек ара ийрилери болгон  $P$ ,  $Q$  чекиттеринде кесилишкендиктен, PQMN дин чекиттеринде  $y$  өзгөрүлмөсү  $\varphi_1(x)$  ийрисинде жайгашкан  $P$  чекитин ординатасынан,  $\varphi_2(x)$  ийрисинде жайгашкан  $Q$  чекитин ординатасына чейинки аралыкта өзгөрө алат. Анткени  $D$  областына  $x = const$  кесүү түзүн бойлоп  $\varphi_1(x)$  чек ара ийрисиндеги  $P$  чекити аркылуу кирсек,  $\varphi_2(x)$  чек ара ийрисиндеги  $Q$  чекити аркылуу чыгабыз. Ал эми  $P$ ,  $Q$  чекиттерин ординаталары,  $x = const$  чекитиндеги  $\varphi_1(x)$  жана  $\varphi_2(x)$  функцияларын маанилери болушат, б.а. бул чекиттер  $P(x; \varphi_1(x)), Q(x; \varphi_2(x))$  координаталарына ээ. Андай болсо PQMN ийри сызыктуу трапециясын аянты

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (22)$$

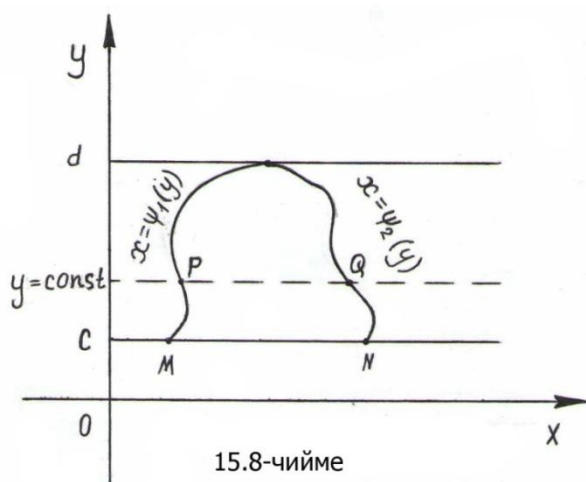
интегралы менен эсептелип, анын мааниси  $x = const$  кесүүчүсүн тандалышына жараша өзгөрүп турган  $S(x)$  функциясы болот.

Жалпы цилиндрдик телонун көлөмүн,  $a \leq x \leq b$  аралыгындагы бардык  $x$  тердин маанилериндеги  $S(x)$  аянттарын суммалоо менен, б.а.  $S(x)$  функциясын  $x$  боюнча интегралдоо менен эсептөөгө болот. Ошентип, эркин берилген  $D$  областы боюнча кош интегралды, кайталануучу интегралга келтирип эсептөөчү

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (23) \end{aligned}$$

эреже келип чыгат.

$D$  областын  $Ox$  огуна параллель ар кандай  $y = \text{const}$  ( $c < y < d$ ) түздөрү менен кескенде,  $D$  областын чек арасын экиден ашык эмес



15.8-чийме

чекиттерде гана кесип өтө алат, болбосо түздөр чек аранын кайсы бир бөлүгү менен дал келет (15.8 – чийме). Мындай шарт коюу менен,  $D$  областын чек ара сызыгын  $x$  келесинде бир маанилүү чечилген эки

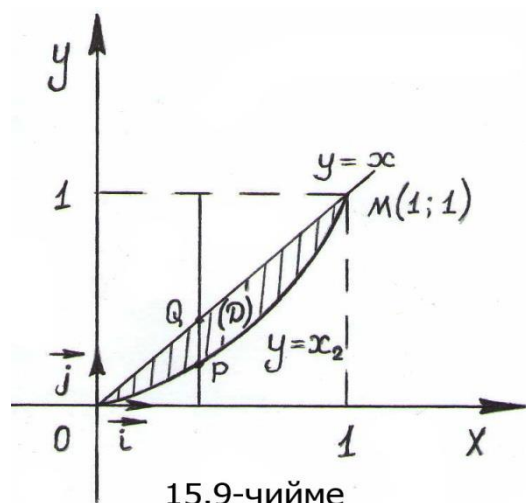
$$\begin{aligned} (MPA): x &= \psi_1(y), \\ (NQA): x &= \psi_2(y), \end{aligned} \quad c \leq y \leq d$$

ийрилерге бөлүүгө болот.

Ушундай шартты канааттандырган  $D$  областында үзгүлтүксүз болгон  $z = f(x, y)$  функциясына карата жогорудагыдай эле талкууларду жүргүзүп, кош интегралды эсептөөчү интегралдоо өзгөрүлмөлөрүн кезеги алмашкан

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (24)$$

кайталануучу интегралды келтирип чыгарабыз. Ошентип, эркин берилген  $D$  областы коюлган шарттарга баш ийген кезде, интегралдоо



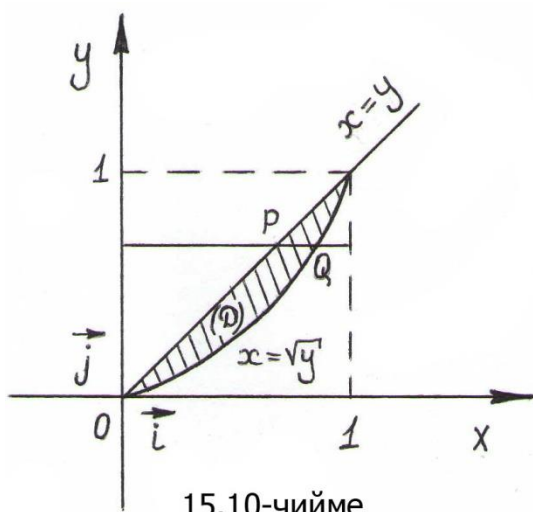
15.9-чийме

өзгөрүлмөлөрүн кезегин алмаштыруудан

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

кош интегралдын мааниси өзгөрбөйт.

**Эскертүү.** Эгерде  $D$  областын чек ара сызыгы  $Ox$  же  $Oy$  окторуна параллель түздөр менен экиден ашык чекиттерде кесилишип калышса, анда  $D$  областын чек ара сызыктары менен экиден ашык эмес



чекиттерде кесилишпей тургандай  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots$  чектүү сандагы бөлүктөргө бөлүп,  $D$  областы боюнча алынуучу кош интегралды, анын бөлүктөрү боюнча алынган кош интегралдардын суммасы катарында эсептейбиз.

### 1. Мисалдар

2)  $f(x, y) = 2x - y + 3$  функциясын  $y = x, y = x^2$  ийрилери менен чектелген  $D$  областы

боюнча кош интегралын эсептегиле (15.9 – чийме).

►  $D$  областын чиймеде көрсөтүп, аны  $Oy$  огуна параллель ар кандай  $x = const$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) түздөрү менен кескенде жана  $Ox$  огуна параллель  $y = const$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) түздөрү менен кескенде, алар  $D$  областын чек ара сызыктарын экиден ашык эмес чекиттерде гана кесип өтөрүн байкайбыз. Ошондуктан  $D$  областы боюнча

$f(x, y) = 2x - y + 3$  функциясын кош интегралын (23), (24) эрежелерин каалаган бири менен эсептей алабыз.

(23) эрежеси боюнча эсептеп көрөлү:  $D$  областын чек арасын  $y$  келесинде бир маанилүү чечилген

$y = x^2 \equiv \varphi_1(x), y = x \equiv \varphi_2(x)$  теңдемелери менен берилген ийрилер чектеп турат, алардын кесилишүү чекиттери  $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x \end{cases}$  теңдемелер системасынан  $O(0; 0)$  жана  $M(1; 1)$  чекиттери экендиги келип чыгып,  $D$  областын толугу менен өзүнө камтып турган тик бурчтук

$\Pi = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  областы болоруна ишенебиз. Анда (23) формуланы колдонуп,

$$\begin{aligned}
\iint_D (2x - y + 3) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2x - y + 3) dy = \\
&= \int_0^1 \left( 2xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left( 2x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x - 2x^3 + \frac{x^4}{2} - 3x^2 \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left( 3x - \frac{3x^2}{2} - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \text{ жообуна ээ болобуз.}
\end{aligned}$$

(24) эрежеси боюнча эсептеп көрөлү:  $D$  областын чек арасы, теңдемелери  $x$  ке карата бир манилүү чыгарылган  $x = y, x = \sqrt{y}$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) ийрилери менен берилгендиктен (15.10 –чийме),

$$\begin{aligned}
\iint_D (2x - y + 3) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x - y + 3) dx = \\
&= \int_0^1 \left( 2 \frac{x^2}{2} - yx + 3x \right) \Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left( y - y^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{y} - y^2 + y^2 - 3y \right) dy = \\
&= \int_0^1 \left( -2y - y^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{y} \right) dy = \left( -y^2 - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} + 2y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \\
&= -1 - \frac{2}{5} + 2 = \frac{3}{5} \text{ жогорудагыдай эле жоопту алабыз. } \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

3)  $xOy$  тегиздиги жана  $z = 1 - 4x^2 - y^2$  бети менен чектелген телонун көлөмүн тапкыла.

►  $z = 1 - 4x^2 - y^2$  функциясы эллиптикалык параболоид бетин

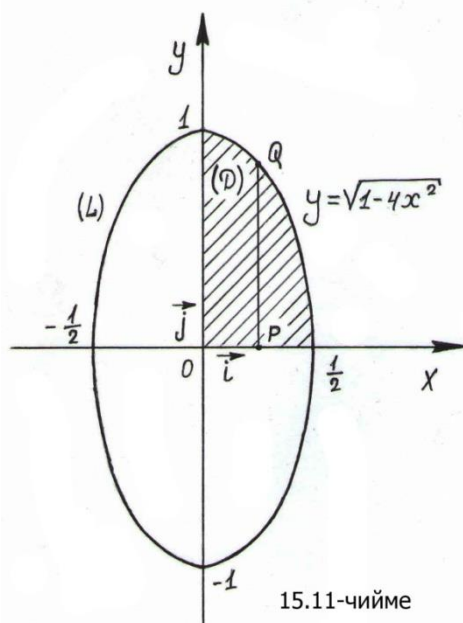
аныктап, анын  $z = 0$  тегиздиги менен кесилиш  $L$  сызыгы (телонун чек

арасы),  $L: \begin{cases} z = 0, \\ z = 1 - 4x^2 - y^2 \end{cases}$  теңдемелер системасын чыгарылыш

көптүгү катарында  $z = 0$  ( $xOy$ ) тегиздигинде жайгашкан

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1} = 1 \text{ эллипс болот (15.11 – чийме). Эллипстин октору } Ox$$

огунда  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $Oy$  огунда  $-1 \leq y \leq 1$  кесиндилери болгондуктан, телонун негизиндеги  $D$  областын толугу менен камтып турган тик бурчтукту



$$\Pi = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

көрүнүштө жазууга болот.

Берилген тело  $xOz$  жана  $yOz$  координаттык тегиздигине карата симметриялуу жайгашкандыктан, анын биринчи октанттагы бөлүгүн көлөмүн эсептеп, төрткө көбөйтүп коёлу.  $Oy$  огуна параллель  $x = const$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ) түздөр менен кескенде,  $D$  областын каралган бөлүгүн чек арасы  $y$  ке карата чыгарылган

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \sqrt{1 - 4x^2} \end{cases} \text{ теңдемелери}$$

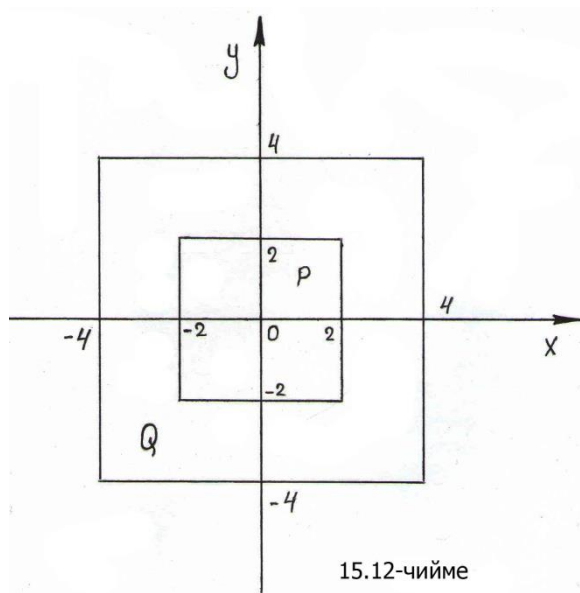
менен сүрөттөлөт. Анда

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D (1 - 4x^2 - y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( (1 - 4x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} 2x = \sin t, 2 dx = \cos t dt \\ 1 - 4x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t, \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0; x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t}{4} \, dt = \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \, dt = \frac{1}{3} \left( t + \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \text{ көлөм бирдигине ээ болобуз. } \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

4) Борборлору координаталар башталмасында болуп, жактары координаттык окторго параллель жайгашып, тиешелүү түрдө 4, 8 узундуктарына ээ болгон квадраттардын арасында жайгашкан  $D$  областы боюнча  $f(x, y) = e^{x+y}$  функциясынан кош интеграл алгыла (15.12 – чийме).



►  $Q$  областы деп, жактарын узундуктары 8 болгон сырткы туюк квадраттын ичин, ал эми  $P$  деп жактары 4 болгон ички туюк квадраттын ичин алсак, анда бул эки областта тең  $z = e^{x+y}$  функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, 15.1 – теоремасын негизинде аталган областтарда интегралдануучу болот. Анда  $D$  областы боюнча кош интеграл

$$\iint_D e^{x+y} \, dx \, dy = \iint_Q e^{x+y} \, dx \, dy - \iint_P e^{x+y} \, dx \, dy,$$

кош интегралдарын айырмасы катарында эсептелет.

$$\begin{aligned}
\text{а) } \iint_Q e^{x+y} \, dx \, dy &= \int_{-4}^4 \left( \int_{-4}^4 e^{x+y} \, dy \right) dx = \int_{-4}^4 e^x \, dx \int_{-4}^4 e^y \, dy = \\
&= (e^x) \Big|_{-4}^4 \cdot (e^y) \Big|_{-4}^4 = (e^4 - e^{-4})^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \iint_P e^{x+y} dx dy &= \int_{-2}^2 \left( \int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx = \int_{-2}^2 e^x dx \int_{-2}^2 e^y dy = \\
 &= (e^x)|_{-2}^2 \cdot (e^y)|_{-2}^2 = (e^2 - e^{-2})^2.
 \end{aligned}$$

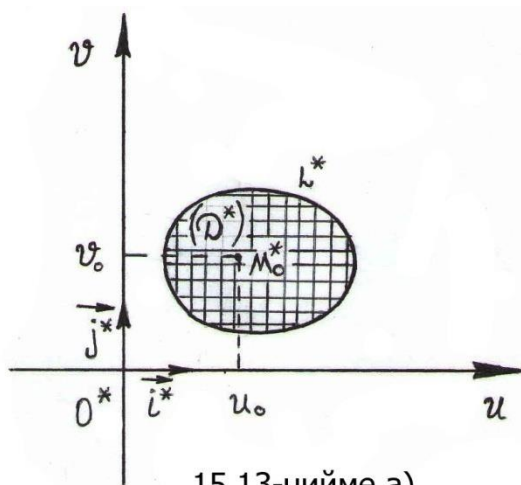
Демек, эсептөөнү талап кылган кош интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{x+y} dx dy &= (e^4 - e^{-4})^2 - (e^2 - e^{-2})^2 = e^8 - 2 + e^{-8} - e^4 + 2 + e^{-4} = \\
 &= 2ch 8 - 2sh 4 \text{ көрүнүштө эсептелет. } \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

## § 15.3 Кош интегралда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу

### 15.3.1 Жалпак областтарды өзгөртүп түзүү

Эки башка  $xOy$  жана  $uO^*v$  координаталар системасында



тиешелүү түрдө  $D$  жана  $D^*$  областтары берилишип, алардын чек аралары жылмакай же бөлүкчө жылмакай  $L$  жана  $L^*$  ийрилери болушсун (15.13 а,б – чиймелер).

Айталы,  $D^*$  областында аныкталган кандайдыр бир

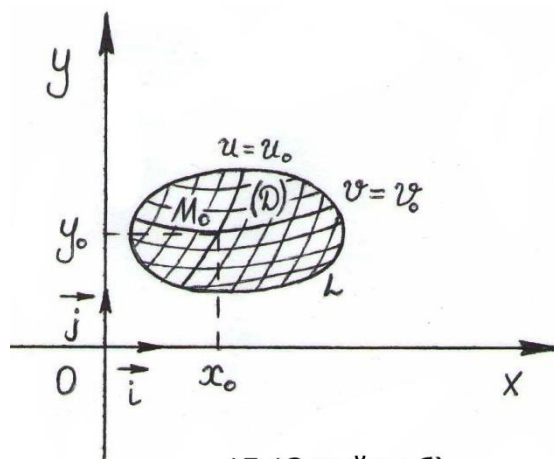
$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (25)$$

функциялары берилсин, алар  $D^*$  областында  $u, v$  өзгөрүлмөрү боюнча жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болушуп,  $D^*$  областын  $D$  областына өз ара бир маанилүү чагылтсын дейли. Өз ара бир маанилүү үзгүлтүксүз функция,  $D^*$  областын ар бир  $M^*(u; v)$  чекиттерине,  $D$  областынын бирден гана  $M(x; y)$  чекиттерин тиешелеш коюп, (25) функцияларын маанилери  $D$  областын жыш толтурат, б.а.  $D^*$  областында чагылтылбай калып кеткен,  $D$  областында чагылтуунун элеси болбогон бир да чекит калбайт. Ошондуктан (25) теңдемелери  $u, v$  өзгөрүлмөлөрүнө карата бир маанилүү чечилет

$$\begin{cases} u = g(x, y), \\ v = h(x, y). \end{cases} \quad (26)$$

Же болбосо (25), (26) функцияларын (чагылтууларын) жардамы менен, эки башка координаттык тегиздиктерде (айрым учурда бир эле тегиздиктерде) жайгашкан  $D^* \leftrightarrow D$  областтарын, бирин – бири менен толук байланыштырууга болот.

Өз ара бир маанилүү чагылтууда  $D^*$  областын чек арасы болгон үзүгү жок  $L^*$  ийриси,  $D$  областын чек арасы болгон үзүксүз  $L$  ийрисине өтөт. Эгерде (26) функциялары да үзгүлтүксүз болушса, анда



15.13-чийме б)

$L \subset D \leftrightarrow L^* \subset D^*$  тескериси да туура болот. Ошентип  $D^*$  областындагы кошуна чекиттер,  $D$  областында да кошуна чекиттерге чагылышат жана тескерисинче. Демек  $uO^*v$  тегиздигинин  $D^*$  областындагы өзгөрүлмөлөрдүн  $u = u_0, v = v_0$  маанилери,  $D^*$  областындагы  $M_0^*(u_0; v_0)$  чекитин гана бир маанилүү аныктап, анын гана абалын сүрөттөбөстөн, кыйыр түрдө  $xOy$  тегиздигин  $D$  областындагы элеси болгон  $M(x_0; y_0)$  чекитин абалын да сүрөттөй алат. Анткени бул чекиттер, (25) тин негизинде  $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$  жана  $y_0 = \psi(u_0, v_0)$  байланыштарында болушат. Ошондуктан,  $D$  областындагы  $x, y$  координаталуу  $M$  чекитин, экинчи бир **ийри сызыктуу координаталар** деп аталган жаңы  $u, v$  сандары менен да мүнөздөй алабыз.

$D$  областындагы координаталардын бирөөсү  $v = v_0$  турактуу сан болгон чекиттердин көптүгүн – *координаттык сызык* деп атап, (25) теңдемелерине  $v = v_0$  маанисин койсок, координаттык сызыктын параметрдик теңдемесин

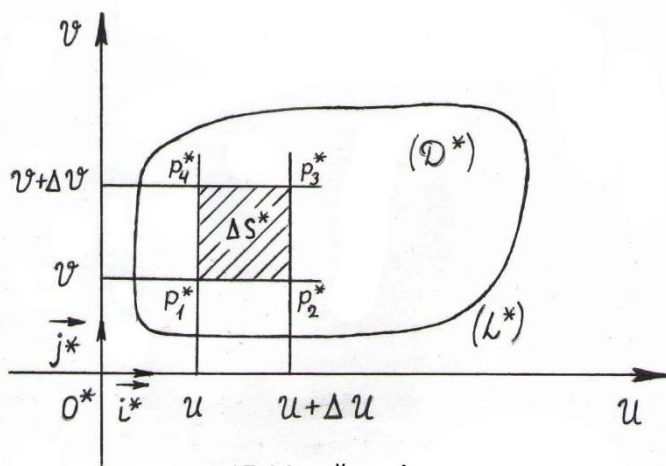
$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0), \\ y = \psi(u, v_0) \end{cases} \quad (27)$$

көрүнүштө жазууга болорун көрөбүз. Мында параметр катарында  $u$  өзгөрүлмөсү алынат.  $v$  өзгөрүлмөсүнө мүмкүн болгон бардык  $v = const$  турактуу маанилерди берип,  $xOy$  тегиздигинде  $u$  параметрине энчиленген координаттык сызыктардын тобуна ээ болобуз. Ушундай эле ыкма менен (25) ке  $u = const$  маанилерин берип,  $xOy$  тегиздигинде  $v$  параметрине энчиленген экинчи бир

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v), \\ y = \psi(u_0, v) \end{cases} \quad (28)$$

теңдемелери менен берилген координаттык сызыктардын тобун түзөбүз.

$D$  жана  $D^*$  областарын арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орноткон чагылтуулардын жардамы менен түзүлгөн энчиленген координаттык сызыктар, өз топторунда ич ара кесилишпейт жана  $D$  областын каалагандай чекити аркылуу, ар бир энчиленген топтон бирден гана координаттык сызыктар өтө алышат. Ошентип, эки башка энчиленген координаттык сызыктардын тобу менен  $xOy$  тегиздигинде жайгашкан  $D$  областы, кайталангыс тартипте торчо көрүнүшүндөгү кескиленген бөлүктөргө бөлүнөт. Мындай торчолор  $xOy$  тегиздигинде (27), (28) ийри сызыктуу координаталары менен берилген координаттык ийри сызыктар аркылуу чектелсе (15.13 б – чийме),  $uO^*v$  координаттык тегиздигинде торчолордун элестери тик бурчтук формасында болушат (15.13 а – чийме).



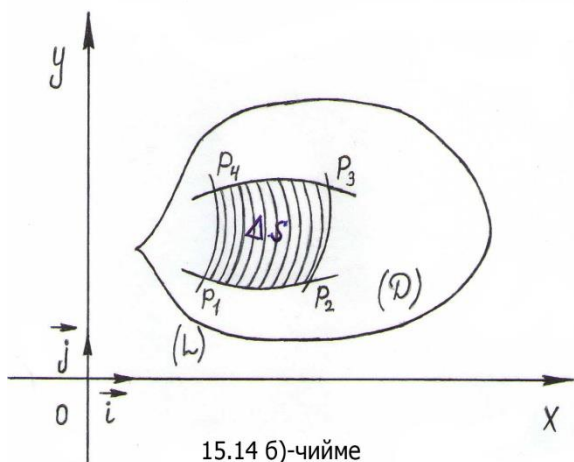
15.14-чийме а)

### 15.3.2 Чагылтылган фигуралардын аягтарын арасындагы байланыштар. Якобиан жана анын геометриялык мааниси

$uO^*v$  координаттык тегиздигин  $D^*$  областынан, жактары  $O^*u, O^*v$

координаттык окторуна параллель болгон, жетишерлик кичине

деп эсептелген  $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$  тик бурчтугун бөлүп карайлы (15.14 а – чийме). Тик бурчтуктун жактарын узундуктары  $\Delta u$  жана  $\Delta v$  оң сандары болсун, анда анын аянты



$$\Delta S^* = \Delta u \cdot \Delta v \quad (29)$$

санына барабар болот.

Бул тик бурчтук  $xOy$  координаттык тегиздигин  $D$  областындагы ийри сызыктуу  $P_1P_2P_3P_4$  төрт бурчтугуна чагылсын дейли (15.14 б – чийме). Эгерде  $D^*$  областындагы тик бурчтуктун чокулары

$P_1^*(u; v)$ ,  $P_2^*(u + \Delta u; v)$ ,  $P_3^*(u + \Delta u; v + \Delta v)$ ,  $P_4^*(u; v + \Delta v)$  координаталары менен берилсе, анда  $D$  областындагы ийри сызыктуу  $P_1P_2P_3P_4$  төрт бурчтугун чокулары (25) байланышы боюнча

$P_1(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ ;  $P_2(\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$ ;

$P_3(\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$ ;

$P_4(\varphi(u, v + \Delta v); \psi(u, v + \Delta v))$  координаталарына ээ болушат.

$(u; v)$  чекитинде  $\varphi(u, v)$  жана  $\psi(u, v)$  көп өзгөрүлмөлүү функцияларын Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратып (2 – бөлүк, §10.8, (10.48) – формуланы кара), каталыкка жол коюу менен  $\Delta u, \Delta v$  өсүндүлөрүнө карата биринчи тартиптеги мүчөлөрүн гана алсак, анда кетирилген каталыктын чегиндеги тактыкта  $P_1P_2P_3P_4$  төрт бурчтугун чокуларынын координаталарын:

$P_1(\varphi; \psi)$ ,  $P_2(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u; \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u)$ ,

$P_3(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v; \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v)$ ,  $P_4(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v; \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v)$

көрүнүштөрдө жаза алабыз. Туюнтулган координаталарга байкоо жүргүзүп,  $P_1P_2P_3P_4$  төрт бурчтугун жетишерлик кичине каталык менен параллелограмм деп эсептөөгө болорун көрөбүз. Анткени анын карама

– каршы жактары ,  $xOy$  координаттык тегиздигин  $\vec{i}, \vec{j}$  ортторуна карата бирдей координаталарга ээ болгон

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \vec{j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u ; \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \right\},$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v + \vec{j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v ; \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right\}$$

барбар векторлор болушат.

Сезилгис каталык менен параллелограмм деп алынган  $P_1P_2P_3P_4$  төрт бурчтугун аянты, анын жактарын түзгөн векторлордун вектордук көбөйтүндүсүн абсолюттук чоңдугу (аянт оң сан) катарында

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx \left| [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4}] \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = \\ &= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta S^* \end{aligned} \quad (30)$$

көрүнүштө табылып,  $D^*$  областында алынган  $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$  тик бурчтугун (29) көрүнүштө эсептелген аянты менен, аны чагылткандан кийинки элеси болгон  $P_1P_2P_3P_4$  параллелограммын аянтынын арасындагы (30) сандык байланышы орнотулат.

(30) теңдештигиндеги аныктагыч немец математиги Якобинин урматына (G. J. Jacobi) якобиан деп аталып,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (31)$$

көрүнүштө белгиленет. Демек, (30) теңдештигин кыскача

$$\Delta S \approx |J| \cdot \Delta S^*, \quad (32) \text{ же}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta S^*} \approx |J| \quad (33)$$

көрүнүштөрдө жазууга болот. (32) теңдештигин оң жагында турган  $|J| \cdot \Delta S^*$  туюнтмасын, *аянттын ийри сызыктуу координаталардагы элементи* деп айтабыз. (33) формуласынан көрүнгөндөй, абсолюттук чоңдугу менен каралган  $|J|$  – Якобианы, геометриялык жактан  $(u; v)$  чекитине чексиз жакын жайгашкан локалдык аянттарды (25) эрежеси боюнча чагылтканда, аянттардын созулуу же кысылуу көрсөткүчү же коэффициенти катарында кызмат кылат. (30), (32), (33) формулалардагы  $\Delta S$  жана  $\Delta S^*$  аянттары, б.а. алардын диаметрлери үзгүлтүксүз (25) байланышында болуп, бири – бирин кубалай бир мезгилде

$\text{diam}\{\Delta S^*\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{diam}\{\Delta S\} \rightarrow 0$  нөлгө умтулганына жараша "  $\approx$  " жакындаштыруу тактыгы чоңоюп, Якобиандын так мааниси

$$J(u, v) = \lim_{\text{diam}\{\Delta S^*\} \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*}$$

пределин мааниси менен аныкталат.

### 15.3.3 Кош интегралдарда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу эрежеси

Айталы,  $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$  функциялары  $D^*$  областында биринчи

тартиптеги жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болушуп,  $D^*$  областын  $D$  областына өз ара бир маанилүү чагылтсын дейли. Ошондой эле,  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги  $D$  областында экинчи бир үзгүлтүксүз  $z = f(x, y)$  функциясы берилип, анын  $D$  областын ар бир  $(x; y)$  чекитиндеги  $z$  мааниси,  $uO^*v$  координаттык тегиздигиндеги  $D^*$  областында аныкталган

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = F(u, v) \quad (*)$$

татаал функциянын кайсы бир  $(u; v)$  чекитиндеги маанисине барабар болсун.

$D^*$  областын жетишерлик кичине  $D_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) торчо – бөлүкчөлөргө бөлсөк, анда  $D$  областы да тиешелүү ийри сызыктуу координаталарда берилген  $D_k$  торчолоруна бөлүнөт.  $D_k$  жана  $D_k^*$  торчо

– бөлүкчөлөрдөн  $f(x, y) = F(u, v)$  теңдештиги орун ала тургандай  $(x; y)$  жана  $(u; v)$  чекиттерин тандап,  $D = \cup D_k$ ,  $D^* = \cup D_k^*$  областтары боюнча  $f(x, y)$ ,  $F(u, v)$  функцияларына карата интегралдык суммаларды түзөлү. Анда сезилгис каталык менен

$$\sum_D f(x, y) \Delta S \approx \sum_{D^*} F(u, v) |J| \cdot \Delta S^* \quad (34)$$

теңдештиштигине ээ болобуз. Мында  $\Delta S \approx |J| \cdot \Delta S^*$ , ал эми  $J$  менен  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  функцияларын Якобианы белгиленген.

(25) чагылтуусу үзгүлтүксүз болгондуктан, (34) теңдештигинен  $\text{diam } D_k^* = d^* \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{diam } D_k = d \rightarrow 0$  умтулгандагы пределге өтөлү:

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D^*} F(u, v) \cdot |J(u, v)| \cdot dS^* \text{ же}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \cdot |J(u, v)| \cdot du dv. \quad (35)$$

Мындан  $D$  областы боюнча  $f(x, y)$  функциясынан алынган кош интеграл менен, (25) чагылтуусун натыйжасында өзгөргөн  $D^*$  областы боюнча  $f(x, y) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$  функциясынан алынган кош интегралды байланыштыруучу (35) формуласы келип чыгат. Мында

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ Якобианы болот.}$$

Эгерде Якобиан  $J(u, v) = 0$  болуп калса, анда (32), (33) формулаларынан байкалгандай, чагылган аянт менен анын элесин арасындагы өлчөм байланыштар жоголуп,  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  функцияларынын,  $(u; v)$  чекитине чексиз жакын жайгашкан локалдык аянттарды өз ара бир маанилүү чагылта аларына ишеним жоголот.

Бирок, айрым бир жекече учурларда  $J(u, v) \neq 0$  болсо деле,  $D^*$  областын кайсы бир чекитин жетишерлик кичине аймакчасында  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  функциялары өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашыра албай калышы мүмкүн. Мисалы



$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, -\infty < u, v < +\infty$  функциясын Якобианы

$$\forall u, v \in D^*: J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} =$$

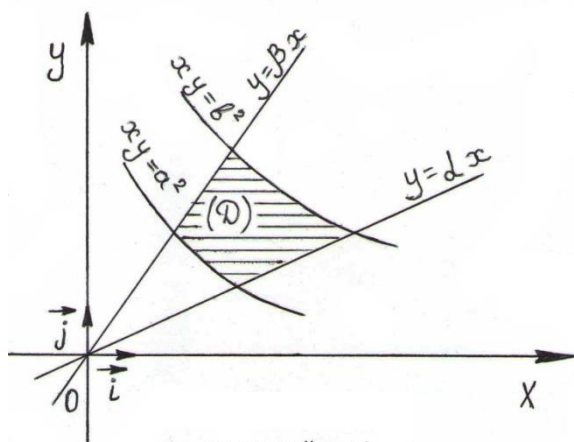
$= e^u \neq 0$  болгону менен,  $D^*$  областындагы эки башка  $u = 0, v = 0$  жана  $u = 0, v = 2\pi$  маанилерине  $D$  областынан бир эле  $x = 1, y = 0$  маанисин туура келгенин көрөбүз.

Тескерисинче, чагылтуучу функциялардын Якобианы  $J(u, v) = 0$  болсо деле, алардын өз ара бир маанилүү чагылтуу боло берерине мисалдар да кездешет. Мисалы  $x = u^3, y = v^3, -\infty < u, v < +\infty$  чагылтуусун Якобианы  $J(u, v) = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2, D^*$  областын  $u = 0, v = 0$  чекитинде нөлгө айланганы менен, өз ара бир маанилүү чагылтуу боло алат, анткени бир маанилүү

$u = \sqrt[3]{x}, v = \sqrt[3]{y}, -\infty < x, y < +\infty$  тескери функциялары жашайт.

Ошондой болсо да, айрым өзгөчө учурларды эске алуу менен (35) эсептөө формуласын  $J(u, v) \neq 0$  шарты аткарылганда гана колдонуп, төмөндөгү эреже – теореманы жетекчиликке алабыз.

**15.4 Теорема.** Декарттык координаталарда берилген кош интегралды, ийри сызыктуу координаталардагы кош интегралга өзгөртүү үчүн, интеграл алдындагы  $f(x, y)$  функциясында  $x$  жана  $y$  өзгөрүлмөлөрүн тиешелүү түрдө  $\varphi(u, v)$  жана  $\psi(u, v)$  өзгөрүлмөлөрү



15.15-чийме а)

менен, ал эми аянттын  $dx dy$  элементин, анын ийри сызыктуу координаталардагы

$dx dy = |J(u, v)| \cdot du dv$  туюнтулушу менен алмаштыруу керек.

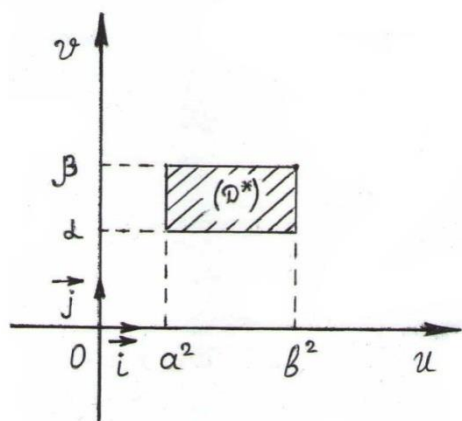
Мисал. 5)  $xy = a^2$  жана  $xy = b^2$  гиперболалары ( $x > 0, y > 0,$

$0 < a < b$ ) жана  $y = \alpha x, y = \beta x$

( $0 < \alpha < \beta$ ) түздөрү менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (15.15 а – чийме). ►  $xOy$  координаттык тегиздигинде жайгашкан жалпак  $D$  областын

аянты  $\iint_D dx dy$  кош интегралы менен эсептелерин билебиз. Демек

$xu = u$  жана  $\frac{y}{x} = v$  белгилөөлөрүн (чагылтууларын) жардамы менен,



15.15-чийме б)

жаңы  $u, v$  ийри сызыктуу координаталарын киргизсек, анда маселенин шартынан  $D$  областы  $uO^*v$  координаттык тегиздигиндеги жөнөкөйлөтүлгөн

$D^* = \{a^2 \leq u \leq b^2, \alpha \leq v \leq \beta\}$  областына өзгөрөрү келип чыгат (15.15 б – чийме).

Киргизилген жаңы белгилөөлөрдөн  $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ ,  $y = \sqrt{uv}$  туюнтууларын

(функцияларын) таап, Якобианын эсептейли

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Анда  $f(x, y) = 1$  болгондо, (11) формуланын негизинде жалпак фигуранын аянты

$S_D = \iint_D dS$  кош интегралы менен эсептелгендиктен, изделген аянтты

$$S_D = \iint_D dS = \iint_{D^*} |J(u, v)| \cdot du dv = \int_{a^2}^{b^2} du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2v} dv =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} \text{ көрүнүштө табабыз. } \blacktriangleleft$$

### 15.3.4 Кош интегралды полярдык координаталарда эсептөө

Тик бурчтуу  $x, y$  координаталары менен берилген кош

интегралдарды,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (36)$$

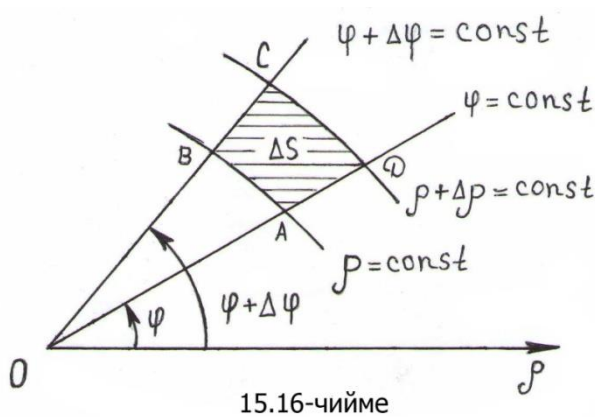
формулалары менен берилген полярдык  $\rho, \varphi$  координаталарына өтүп

эсептөө маселесине токтололу. Бул учурда Якобиан

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \quad \text{көрүнүштө табылып,}$$

полярдык координаталардагы аянттын элементи  $dS = \rho d\rho d\varphi$  (\*\*)  
көрүнүштө жазылат. Ошондуктан (35) формуласын

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho d\varphi \quad (37)$$



көрүнүштө колдоно алабыз.

Полярдык координаталардагы аянттын (\*\*)  
элементине геометриялык жактан түшүндүрмө берели. Полярдык координаталары менен берилген торчону 15.16 – чиймеде штрихтеп көрсөтүп, анын аянттын

$$\Delta S = S_{ODC \text{ сектору}} - S_{OAB \text{ сектору}} = \frac{1}{2} (\rho + \Delta\rho)^2 \cdot \Delta\varphi - \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \Delta\varphi =$$

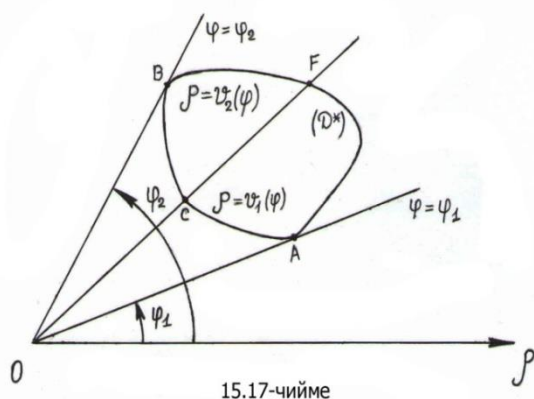
$= \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\varphi + \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 \cdot \Delta\varphi$  табабыз. Мындан жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдукту таштап сызыктуу башкы бөлүгүн калтырсак,  $\Delta S \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\varphi$  туюнтмасына ээ болуп, полярдык координаталарда

берилген аянттын элементи  $dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$  көрүнүштө жазылары келип чыгат.

Ошентип декарттык координаталарда берилген кош интегралды, полярдык координаталарга өтүп эсептөө үчүн, интеграл алдындагы функциянын  $x, y$  өзгөрүлмөлөрүн ордуна  $\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi$  өзгөрүлмөлөрүн коюп, декарттык координаталардагы  $dx \cdot dy$  – аянттын элементин, полярдык координаталардагы  $\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$  – аянттын элементи менен алмаштыруу керек.

Полярдык координаталар системасына өткөндөн кийин да кош интегралды декарттык координаталар системасындагыдай эле, кайталануучу интегралдарга келтирип эсептейбиз. Ал үчүн полярдык координаталар системасын  $O$  полюсун жайгашуу абалдарына карата төмөндөгүдөй учурларга токтолобуз:

### 1. $O$ – полюсу берилген $D^*$ областын сыртында жайгашсын.



15.17-чийме

Айталы,  $O$  полюсунан чыккан каалагандай  $\varphi = const$  шоолалары  $D^*$  областын чек ара сызыгын экиден ашык эмес чекиттерде гана кесип өтсүн, болбосо шооланын кайсы бир кесиндиси чек ара менен дал келсин деген шарт аткарылсын (15.17 – чийме).  $\varphi$  полярдык бурчун четки  $\varphi_1, \varphi_2$  маанилерин кайталануучу

интегралдын сырткы пределдери катарында кабыл алабыз

$$(\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2).$$

$\varphi = \varphi_1$  шооласы  $D^*$  областын чек ара сызыгында жайгашышкан  $A$  чекити, ал эми  $\varphi = \varphi_2$  шооласы  $B$  чекити аркылуу өтүшсүн. Анда  $A$  жана  $B$  чекиттери  $D^*$  областын чек ара сызыгын эки  $ACB$  жана  $AFB$  ийрилерден турган бөлүктөргө бөлөт. Айталы,  $ACB$  ийриси  $\rho = v_1(\varphi)$ ,  $AFB$  ийриси  $\rho = v_2(\varphi)$  полярдык теңдемелери (функциялары) менен берилип, бул функциялар  $\varphi$  ге карата үзүлтүксүз жана бир маанилүү болуу менен катар  $\forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2): v_1(\varphi) \leq v_2(\varphi)$  шарттарына баш

ийишсин.  $v_1(\varphi)$  жана  $v_2(\varphi)$  функциялары кайталануучу интегралдын ички пределдери катарында кабыл алынат. Анда (37) формуласын оң жагын

$$\iint_{D^*} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{v_1(\varphi)}^{v_2(\varphi)} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho$$

көрүнүштөгү кайталануучу интегралдарга келтирүү менен эсептей алабыз. (\*) белгилөөсүн колдонуп бул формуланы,

$$\iint_{D^*} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{v_1(\varphi)}^{v_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho \quad (38)$$

көрүнүштө жазууга болот. Эгерде  $D^*$  областында  $F(\rho, \varphi) \equiv 1$  болсо, (38) формуласы  $D^*$  областын аянтын эсептөөчү

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{v_1(\varphi)}^{v_2(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [v_2^2(\varphi) - v_1^2(\varphi)] d\varphi \quad (39)$$

формуласына айланат.

## 2. O – полюсу $D^*$ областын ички чекити болсун.



Бул учурда полюстан чачылып чыккан каалагандай  $\varphi = const$  шоолалары,  $D^*$  областын чек арасызыгын бир гана чекитте кесип өтөт, болбосо шооланын кайсы бир кесиндиси менен дал келет деген шарт коюлат (15.18 – чийме). Айталы  $\rho = v(\varphi)$  функциясы,  $D^*$  областын полярдык координаталардагы теңдемеси болсун. Анда  $\varphi$  бурчу O полюсунан чачырап, аны толук айланып чыкканга  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  чейинки, ал эми  $\rho$  аралыгы O полюсунан областын чек арасына жеткенге  $0 \leq \rho \leq v(\varphi)$  чейинки аралыктарда өзгөрүшөт. Демек,  $F(\rho, \varphi)$  функциясынан  $D^*$  областы боюнча алынуучу кош интеграл

$$\iint_{D^*} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{v(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho, \quad (40)$$

көрүнүштөгү кайталануучу интегралдын жардамы менен эсептелет.

Мисал. 6) Бирдик тегеректин биринчи квадранттагы

$D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  бөлүгү боюнча

$$V = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$$

кош интегралын эсептегиле.

►  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  полярдик координаталарга өтсөк,  $D$  областы

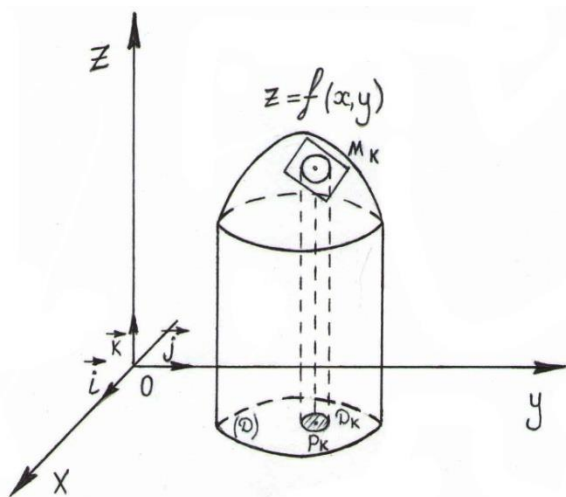
$D^* = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  областына өзгөрүп, берилген кош интегралды

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy &= \iint_{D^*} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \iint_{D^*} \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+\rho^2)}{\sqrt{1+\rho^2}} = \left| \begin{array}{l} 1+\rho^2 = t, dt = 2\rho d\rho, \\ \rho = 0 \Leftrightarrow t = 1, \\ \rho = 1 \Leftrightarrow t = 2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2} \text{ эсептейбиз. } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

### § 15.4 Беттин аянтын эсептөө

$R^3$  мейкиндигинде  $\Pi$  – бети берилип, анын  $xOy$  тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы  $D$  областын түзсүн, анда  $D$  областын ар бир  $P(x; y)$  чекиттеринде аныкталган кандайдыр бир  $z = f(x, y)$  функциясын графигин  $\Pi$  бети катарында кароого болот.

$\Pi$  – бети жылмакай болсун, б.а. анын ар бир чекитинен жаныма тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн болсун дейли. Ал үчүн  $z = f(x, y)$  функциясынан  $D$  областын ар бир чекитинде  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  жекече туундулары жашап, үзгүлтүксүз функциялар болушу талап кылынат.



15.19-чийме

$D$  областын  $n$  сандагы квадратталуучу (аянты эсептөөгө мүмкүн болгон), өз ара жалпы ички чекиттерге ээ болбогон  $D_1, D_2, \dots, D_n$  бөлүкчө областтарга бөлүп, алардын аянттарын тиешелүү түрдө

$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  деп белгилейли.  $D_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) бөлүкчө областтардын диаметрлерин эң чоңун  $d$  саны дейли.

$D_k$  областтарын ар биринен эркин тандалган  $P_k(\xi_k; \eta_k)$  чекиттерин алсак, анда  $\tau_k = f(\xi_k, \eta_k)$  тиешелештиги аркылуу  $\Pi$  бетинде турган  $M_k(\tau_k; \xi_k; \eta_k)$  координаталуу чекитти табууга болот (15.19 – чийме). Табылган  $M_k$  чекити аркылуу  $\Pi$  бетине жаныма тегиздик жүргүзсөк, анын теңдемесин (2 – бөлүк, §10.6, (10.35) – формула)

$$z - \tau_k = f'_x(\xi_k, \eta_k) \cdot (x - \xi_k) + f'_y(\xi_k, \eta_k) \cdot (y - \eta_k) \quad (41)$$

көрүнүштө жазууга болот. Эгерде негизи  $D_k$  областы болгон, каптал бети түзүүчүлөрү  $D_k$  нын чек ара сызыгынан өтүүчү  $Oz$  огуна параллель түздөрдөн турган цилиндрдик бет курсак. Анда мындай цилиндрдик бет,  $M_k$  чекитинен жүргүзүлгөн (41) жаныма тегиздигинен аянты  $\Delta \sigma_k$  болгон  $\sigma_k$  бөлүкчө аянтчасын (бетин) кыркып өтөт жана  $\sigma_k$  бөлүкчө бети да  $xOy$  тегиздигиндеги  $D_k$  областына бир маанилүү проекцияланат. Ошондуктан  $d \rightarrow 0$  умтулганда  $D_k, \sigma_k$  экөөсү тең бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушат.

Охуз координаттык мейкиндигинде жайгашкан  $\Pi$  бетин аянтын, анын ар бир  $M_k$  чекитинен жүргүзүлгөн (41) жаныма тегиздиктеринен кыркылып түзүлгөн,  $\sigma_k$  бөлүкчө беттердин  $\Delta \sigma_k$  – аянттарынын



$$\sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k \quad (42)$$

суммасы катарында эсептеп туралы.

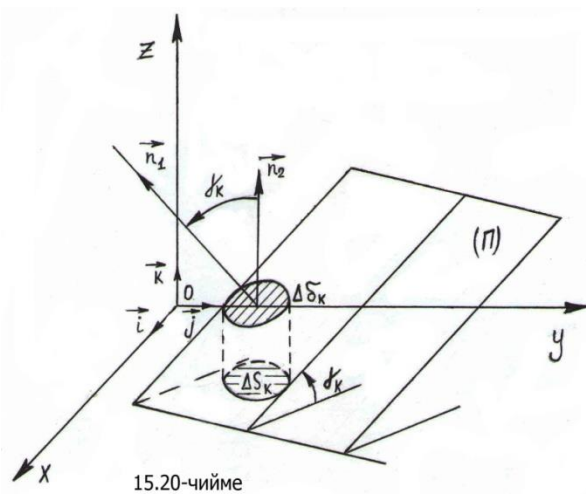
**15.2 Аныктама.** Эгерде  $d \rightarrow 0$  умтулгандагы (42) сумманын чектүү предели

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = S \quad (43)$$

жашаса, анда анын мааниси болгон  $S$  саны,  $\Pi$  бетин аянты деп аталат.

Ошентип,  $\Pi$  бетин аянтын табуу үчүн, адегенде анын бетинде жайгашкан чекиттерден жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктердин  $\sigma_k$  кыркындыларынан куралган, башка бир (42) бетин аянтын эсептейбиз. Андан кийин кыркынды беттердин диогоалдарын эң чоңу нөлгө умтулгандагы пределге өтүп, же кыркынды беттер бир чекитке айланганга чейинки абалга жетип, ошол чекит чендеринин суммасын  $\Pi$  бетин аянты дейбиз.

Кийинки кадамда,  $\Pi$  бетинин  $S$  аянтын эсептеп чыгаруу усулун келтирип чыгаралы. Ал үчүн  $\gamma_k$  деп,  $\Pi$  бетине  $M_k$  чекитинде жүргүзүлгөн (41) жаныма тегиздиги менен  $xOy$  тегиздигин арасындагы бурчту белгилеп, аны  $\sigma_k$  менен  $D_k$  бөлүкчөлөрүн арасындагы бурч катарында кабыл алалы. Ошол эле  $\gamma_k$  бурчу, (41) жаныма тегиздигине



$M_k$  чекитинен түшүрүлгөн нормаль менен  $Oz$  огун арасындагы бурчка тең болот (15.20 – чийме). (41) теңдемесинен  $M_k$  чекитинен түшүрүлгөн нормаль вектор

$\vec{n}_1 = \{f'_x(\xi_k, \eta_k); f'_y(\xi_k, \eta_k); -1\}$ , ал эми  $Oz$  огун бирдик вектору

$\vec{n}_2 = \{0; 0; 1\}$  координаталары менен жазылары белгилүү.



Жалпак фигуранын кайсы бир тегиздиктеги проекциясын аянты, проекциялануучу фигура жаткан тегиздик менен проекциясы түшкөн тегиздиктин арасындагы тар бурчтун косинусуна, проекцияланып жаткан фигуранын аянтын көбөйткөнгө барабар болгондуктан,

$$\Delta S_k = \Delta \sigma_k \cdot |\cos \gamma_k| \text{ болуп,}$$

$$\Delta \sigma_k = \frac{\Delta S_k}{|\cos \gamma_k|} \quad (44)$$

келип чыгат.

Скалярдык көбөйтүүлөрдү координаталары боюнча аткарып

$$\cos \gamma_k = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (f'_y(\xi_k, \eta_k))^2}}, \text{ табылган маанини (44)}$$

кө койсок,

$$\Delta \sigma_k = \sqrt{1 + (f'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (f'_y(\xi_k, \eta_k))^2} \cdot \Delta S_k \text{ болорун көрөбүз. Андай болсо, (42) суммасы}$$

$$\sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (f'_y(\xi_k, \eta_k))^2} \cdot \Delta S_k \quad (45)$$

көрүнүшкө келет.

Шарт боюнча  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  функциялары  $D$  областында үзгүлтүксүз функциялар, ошондуктан алардын суперпозициясы катарында  $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$  функциясы да үзгүлтүксүз функция болуп,  $D$  областында интегралдануучу болот. Демек, (45) суммасын  $d \rightarrow 0$  умтулгандагы чектүү предели жашайт жана пределдин мааниси, биринчиден 14.1 аныктамасы боюнча  $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$  функциясынан  $D$  областы боюнча алынган

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy$$

кош интеграл болсо, экинчиден 15.2 аныктамасына ылайык  $\Pi$  бетин  $S$  аянтына барабар болот.

Ошентип,  $z = f(x, y)$  функциясын графиги катарында эсептелген  $\Pi$  бетин аянты  $(x, y \in D)$ , анын  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги проекциясы болгон  $D = D_{xy}$  областы боюнча  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$  функциясынан алынган

$$S = \iint_{D_{xy}} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (46)$$

кош интеграл менен эсептелет. Мында

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (46^*)$$

беттин аянтынын элементи деп аталат.

Эгерде  $\Pi$  бети  $y = f(x, z)$  функциясы менен берилсе, анда бетти  $xOz$  координаттык тегиздигине проекциялап, (46) формуланы

$$S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \quad (47)$$

көрүнүштө, ал эми бет  $x = f(y, z)$  функциясы менен берилсе, бетти  $yOz$  тегиздигине проекциялап (46) формуласын

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \quad (48)$$

көрүнүшкө келтирип, эсептөө иштеринде колдонобуз.

Мисал. 7) Борбору координата башталмасында жайгашкан, радиусу  $R$  болгон  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  сферасын бетинин аянтын тапкыла.

► Сферанын  $xOy$  тегиздигин жогору жагындагы бетинин бөлүгү (сферанын жарымы)  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  функциясы менен берилгендиктен,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \text{ жекече туундуларына ээ болобуз.}$$

Ошондуктан беттин аянтын элементи

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

көрүнүштө эсептелип, интегралдоо областы

$D = \{x^2 + y^2 \leq R\}$  тегерегин ичи болот. Андай болсо, сферанын жогорку бөлүгүндөгү беттин аянты (46) формуласы боюнча

$$\begin{aligned} S_{\text{жог.}} &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \\ J = \rho \end{array} \right| = R \iint_{D^*} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \end{aligned}$$

$= 2\pi R \cdot (-\sqrt{R^2 - \rho^2}) \Big|_0^R = 2\pi R^2$  көрүнүштө табылат. Демек, сферанын толук беттин аянты  $S = 2 \cdot S_{\text{жог.}} = 4\pi R^2$  болот. ◀

**Эскертүү.** (46) – (48) формулаларынан цилиндрдик жана сфералык беттердин аянттарын эсептөөнүн ыңгайлуу формулаларын келтирип чыгарууга болот:

1) Радиусу  $R$  болгон цилиндрдик беттин аянтын элементин  $(\varphi, z)$  координаталарына өтүү менен

$$d\sigma = R d\varphi dz \text{ көрүнүштө жазабыз;} \quad (49)$$

2) Радиусу  $R$  болгон сфералык беттин аянтын элементин  $(\theta, \varphi)$  координаталарына өтүү менен

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \text{ көрүнүштө жазабыз.} \quad (50)$$

Мында  $\varphi$  бурчу  $O$  координата баиталмасынан байкалган  $xOy$  тегиздиги боюнча өзгөрүү бурчу, ал эми  $\theta$  бурчу  $xOy$  тегиздигинен  $Oz$  огуна карата  $O$  координата баиталмасынан каралган көтөрүлүү бурчу.

Мисалы, жогорудагы сфераны жогорку бетиндеги чекиттерде  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , ал эми  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  аралыктарында өзгөрүшөт. Анда (50) формуланы пайдаланып, сферанын толук бетин аянтын

$$S = 2 \iint_{D^*} d\sigma = 2 \iint_{D^*} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta =$$

$$= 2R^2 \cdot 2\pi(-\cos \theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2 \cdot 1 = 4\pi R^2$$

көрүнүштө эсептеп,

жогорудагыдай эле жоопко ээ болобуз.

## § 15.5 Үчтүк интеграл жана аны түзүүгө түрткү болгон практикалык мисалдар

### 15.5.1 Материалдык телонун массасын эсептөө. Үчтүк интегралдын аныктамасы

Айталы,  $R^3$  мейкиндигинде  $\Omega$  областы берилип, ал кандайдыр бир масса менен толтурулган материалдык телону түзсүн. Түзүлгөн  $\Omega$  телосун массасын табуу маселесин карайлы. Телонун ар бир

$P(x; y; z) \in \Omega$  чекиттеринде тыгыздык ар башка болуп,

$\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$  мыйзамы (функциясы) менен аныкталсын, б.а. тело бир тектүү эмес болсун.

$\Omega$  областын  $n$  сандагы кубдаштырылуучу (чектүү көлөмүн эсептөөгө мүмкүн болгон) өз ара кесилишпеген  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  майда бөлүкчө областтарга бөлүп, алардын көлөмдөрүн тиешелүү түрдө  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$  деп белгилейли. Ар бир  $\Omega_k$  областтарынан эркин абалда бирден  $P_k$  чекиттерин тандап, бул чекиттердин жакынкы чеке бели деп эсептелген  $\Omega_k$  бөлүкчө областында тыгыздык турактуу деп ойлоп,  $\Omega$  телосун массасын жакындаштырылган түрдө, ар бир бөлүкчө  $\Omega_k$  областтарын  $\Delta m_k = \rho(P_k) \cdot \Delta v_k$  — массаларын суммасы катарында

$$M \approx \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \Delta v_k \quad (51)$$

эсептөгө болот.

Айталы,  $\Omega_k$  областарын диаметрлерин эң узуну  $d$  болсун. Эгерде  $d \rightarrow 0$  умтулганда  $\Omega$  областын кандай ыкма менен  $\Omega_k$  бөлүкчөлөргө бөлгөнүбүзгө жана  $P_k$  чекиттерин кандай тандаганыбызга карабастан, (51) суммасы чектүү пределге ээ болсо, анда

$$M = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \Delta v_k \quad (52)$$

бул пределдин мааниси  $\Omega$  телосун массасы болорун көрөбүз.

Чыгарылган мисалды функциялардын тилинде жалпылап, (52) пределдин эсептөө аппаратын түзөлү. Ал үчүн кубдаштырылуучу  $\Omega$  туюк областында чектелген  $f(P) = f(x, y, z)$ ,  $P(x; y; z) \in \Omega$  функциясы аныкталсын дейли.  $\Omega$  областын өз ара кесилишпөөчү  $n$  сандагы кубдаштырылуучу  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  бөлүкчө областтарга бөлүп, алардын көлөмдөрүн тиешелүү түрдө  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$  деп белгилеп, эркибизче ар бир бөлүкчө  $\Omega_k$  областынан  $P_k(x_k; y_k; z_k)$  чекиттерин тандап,  $\Omega$  областында  $f(P)$  функциясы үчүн

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta v_k \quad (53)$$

интегралдык суммасын түзөлү. Бөлүкчө  $\Omega_k$  областардын

( $k = 1, 2, \dots, n$ ) диаметрлерин эң узунун  $d$  деп белгилейли.

**15.3 Аныктама.** Эгерде  $\Omega$  областын кандай ыкмада бөлүкчө  $\Omega_k$  областтарга бөлгөнүбүздөн жана бөлүкчөлөрдөн  $P_k$  чекиттерин тандаганыбыздан көз каранды болбостон,  $d \rightarrow 0$  умтулганада  $\sigma$  интегралдык суммасын чектүү предели жашаса, анда ал пределдин мааниси  $f(x, y, z)$  функциясынан  $\Omega$  областы боюнча алынган үчтүк интеграл деп аталат. Үчтүк интеграл

$$\iiint_{\Omega} f(P) dv, \quad \text{же} \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

көрүнүштөрдө белгиленет.

Ошентип аныктамага ылайык, үчтүк интеграл

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k \quad \text{предели менен аныкталып,}$$

(52) массанын пределдик маанисине уйкаш экенин байкайбыз. Чынында эле телонун массасын

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(P) dv = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

үчтүк интеграл көрүнүштө жазууга болот. Мында  $dx dy dz$  көбөйтүндүсү, тик бурчтук координаталар системасындагы көлөмдүн  $dv$  – элементи болот. Демек төмөндөгү теорема туура болот.

**15.5 Теорема.** Эгерде кубдаштырылуучу  $\Omega$  туюк областында  $f(x, y, z)$  функциясы үзгүлтүксүз функция болсо, анда ал ушул областта интегралдануучу болот.

### 15.5.2 Үчтүк интегралдардын касиеттери

Үчтүк интегралдар да анык жана кош интегралдар сыяктуу эле касиеттерге ээ, анткени алардын бардыгы бөлүкчөлөрдү суммалоо жана түзүлгөн сумманын пределин табуу амалдарына негизделген. Алардын негизгилерине токтолуп өтөлү.

Айталы кубдаштырылуучу  $\Omega$  туюк областында  $f(P)$  жана  $\varphi(P)$  функцияларын экөөсү тең интегралдануучу функциялар болушсун ( $P \in \Omega$ ).

**1<sup>0</sup>. Сызыктуулук касиети.**

$$\iiint_{\Omega} [\alpha f(P) + \beta \varphi(P)] dv = \alpha \iiint_{\Omega} f(P) dv + \beta \iiint_{\Omega} \varphi(P) dv.$$

Мында  $\forall \alpha, \beta \in R$ .

**2<sup>0</sup>.**  $\forall P \in \Omega : f(P) \leq \varphi(P)$  болсо, анда бүтүндөй  $\Omega$  областында

$$\iiint_{\Omega} f(P)dv \leq \iiint_{\Omega} \varphi(P)dv \text{ барабарсыздыгы аткарылат.}$$

**3<sup>0</sup>.**  $\Omega$  областында  $f(P) \equiv 1$  болсо, анда

$$V = \iiint_{\Omega} dv$$

үчтүк интегралын сандык мааниси  $\Omega$  областын  $V$  көлөмүнө тең болот.

**4<sup>0</sup>.** Айталы, кубдаштырылуучу  $\Omega$  туюк областында  $f(P)$  функциясы үзгүлтүксүз болуп,  $\Omega$  областын чекиттериндеги эң чоң мааниси  $M$  жана эң кичине мааниси  $m$  болсун. Анда

$$m \cdot V \leq \iiint_{\Omega} f(P)dv \leq M \cdot V$$

барабарсыздыктары аткарылат. Мында  $V$  саны  $\Omega$  областын көлөмү.

**5<sup>0</sup>.** **Аддитивдүүлүк касиети.** Эгерде  $\Omega$  областы өз ара жалпы ички чекиттерге ээ болбогон кубдаштырылуучу  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  областарга бөлүнсө, анда  $\Omega$  областында интегралдануучу болгон  $f(P)$  функциясы  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  областтарында да интегралдануучу болуп,

$$\iiint_{\Omega} f(P)dv = \iiint_{\Omega_1} f(P)dv + \iiint_{\Omega_2} f(P)dv$$

теңдештиги орун алат.

**6<sup>0</sup>.** **Орточо маани жөнүндөгү теорема.**

**15.7 Теорема.** Эгерде кубдаштырылуучу бир байламталуу  $\Omega$  туюк областында  $f(P)$  үзгүлтүксүз функция болсо, анда  $\Omega$  областынан кандайдыр бир  $P_c$  чекити табылып,

$$\iiint_{\Omega} f(P)dv = f(P_c) \cdot V$$

теңдештиги аткарылат. Мында  $V$  саны  $\Omega$  областын көлөмү.

### 15.5.3 Үчтүк интегралды декарттык координаталарда эсептөө

Үчтүк интеграл да кош интегралдар сыяктуу эле кайталануучу интегралдарга келтирилип,  $\Omega$  областын түзүлүшүнө жараша учурларга бөлүнөт.

**1 – учур.**  $R^3$  мейкиндигинде түзүлгөн  $Oxyz$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасында берилген  $\Omega$  областы

$\Omega = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$  көрүнүштөгү тик бурчтуу параллелепипед болуп, анын  $yOz$  координаттык тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы  $D = \{c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$  тик бурчтугу болсун. Айталы, ушундай  $\Omega$  параллелопипединде үзгүлтүксүз болгон кандайдыр бир  $f(x, y, z)$  функциясы берилсин. Анда бул функциядан  $\Omega$  параллелопипеди боюнча алынган үчтүк интегралды

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \iint_D f(x, y, z) ds \quad (54)$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мындагы кош интегралды кайталануучу интегралдар менен алмаштырып,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(x, y, z) dz \quad (55)$$

үч эселүү кайталануучу интегралга келебиз. Эгерде  $\Omega$  областын  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги проекциясы

$D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  тик бурчтугу болсо, анда (55) формуласын

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D \left( \int_l^m f(x, y, z) dz \right) dx dy \quad (56)$$

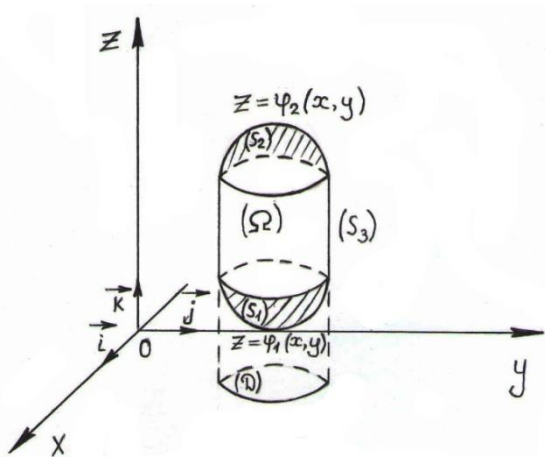
көрүнүштө жаза алабыз.



Ошентип,  $\Omega$  областы параллелолипед болгон учурда, үчтүк интеграл ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча өз – өзүнчө алынып, үч жолу кайталанган бир өзгөрүлмөлүү анык интегралдар сыяктуу эсептелет жана  $f(x, y, z)$  функциясында интеграл алынып жаткан өзгөрүлмөдөн башкалары кезеги менен турактуу катары катышышат.

**2 – учур.** Айталы  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан эркин формадагы  $\Omega$  областы берилип, аны чектеп турган чек аралык бетти  $S$  дейли. Чек аралык  $S$  бетине:

1)  $Oz$  огуна параллель каалгандай түз,  $S$  бети менен экиден ашык эмес гана чекиттерде кесилишет,

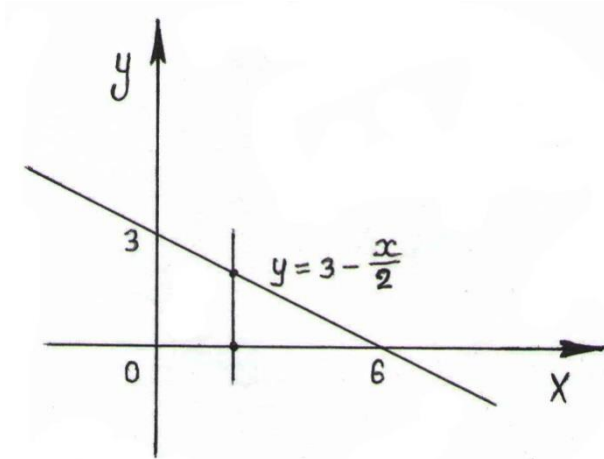


2) болбосо  $Oz$  огуна параллель түздүн кайсы бир кесиндиси толугу менен  $S$  бетинде жатат деген шарттарды коёлу.

Ошондой эле,  $\Omega$  областы төмөн жагынан  $z = \varphi_1(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $S_1$  бети менен, ал эми жогору жагынан  $z = \varphi_2(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $S_2$  бети менен чектелип,  $S_1, S_2$  беттерин  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги проекциялары дал келишип, бир эле жалпак  $D$  областын түзүшсүн деп эсептейли.  $D$  областын чек арасы  $L$  ийриси болсун (15.21 – чийме). Андай болсо  $\Omega$  областын чектеп турган  $S$  бети: негиздери  $S_1, S_2$  беттеринен, ал эми каптал бети түзүүчүлөрү  $L$  ийрисинен чыгып  $Oz$  огуна параллель түздөр болгон цилиндрдик  $S_3$  бетинен турган болот. Бул учурда үчтүк интегралды (56) формуласына окшоштуруп,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D \left[ \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad (57)$$

көрүнүштө жазып эсептей алабыз.



15.22-чийме

Эгерде  $xOy$  координаттык тегиздигинде жайгашкан  $D$  областы  $y = \psi_1(x)$ ,  $y = \psi_2(x)$ , функциялары менен чектелген ( $a \leq x \leq b$ ) ийри сызыктуу трапеция болсо, анда (57) формуласындагы кош интегралды кайталануучу интегралга алмаштырып, үчтүк интегралды эсептөөчү

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (58)$$

жалпыланган формулага ээ болобуз.

Мисал. 8)  $x = 0, y = 0, x + 2y + z - 6 = 0$  тегиздиктери менен чектелген тетраэдрдин көлөмүн тапкыла.

► Тетраэдрдин  $xOy$  тегиздигиндеги проекциясы  $x = 0, y = 0, x + 2y = 6$  түздөрү менен чектелген үч бурчтук болот (15.22 – чийме). Демек  $x$  өзгөрүлмөсү  $0 \leq x \leq 6$  аралыгында өзгөрүп, ушул аралыкта кыймылы токтотулуп турактуу катары кабыл алынган ар бир  $x$  үчүн,  $y$  өзгөрүлмөсү  $y = 0$  менен  $y = 3 - \frac{x}{2}$  түздөрүн арасында; ал эми  $x, y$  өзгөрүлмөлөрү турактуу сыяктуу кыймылдабай турганда,  $z$  өзгөрүлмөсү бийиктикке карай  $z = 0$  тегиздигинен  $z = 6 - x - 2y$  тегиздигине чейин өзгөрүлөт. Анда  $f(x, y, z) \equiv 1$  болгондо  $3^0$  касиеттеги интегралды (58) эрежеси менен эсептеп, изделген көлөмдү

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{6-x-2y} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} (6-x-2y) dy = \int_0^6 \left[ (6-x)y - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx = \\
&= \int_0^6 \left[ (6-x) \left( 3 - \frac{x}{2} \right) - \left( 3 - \frac{x}{2} \right)^2 \right] dx = \int_0^6 \left( 3 - \frac{x}{2} \right) \left( 6 - x - 3 + \frac{x}{2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^6 (6-x)^2 dx = -\frac{1}{4} \int_0^6 (6-x)^2 d(6-x) = -\frac{1}{4} \left( \frac{(6-x)^3}{3} \right) \Big|_0^6 = 18
\end{aligned}$$

табабыз. ◀

#### 15.5.4 Үчтүк интегралды цилиндрдик координаталарда эсептөө

Үчтүк интегралдарда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу маселеси, кош интегралдарда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу маселеси сыяктуу чечилет. Айталы,  $f(x, y, z)$  функциясы кубдаштырылуучу  $\Omega$  туюк областында

$$\text{үзгүлтүксүз болсун, ал эми } \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \tau), \\ y = y(\xi, \eta, \tau), \\ z = z(\xi, \eta, \tau) \end{cases} \quad (59)$$

функциялары, кайсы бир кубдаштырылуучу  $\Omega^*$  туюк областында биринчи тартиптеги жекче туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялар болушуп,  $\Omega^*$  областын  $\Omega$  областына өз ара бир маанилүү чагылтсын. Анда үчтүк интегралда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу

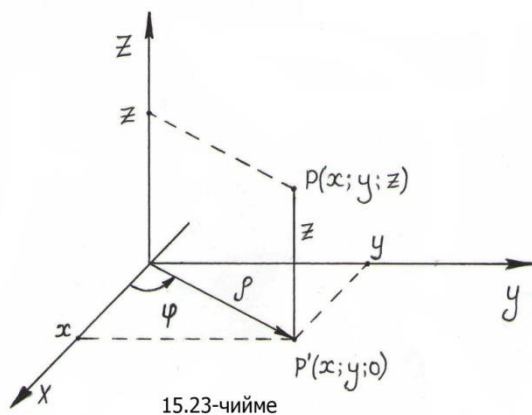
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f[x(\xi, \eta, \tau), y(\xi, \eta, \tau), z(\xi, \eta, \tau)] |J| d\xi d\eta d\tau \quad (60)$$

формуласы менен ишке ашырылат. Мында  $J$  Якобианы өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу кезинде көлөмдөрдүн элементтерин созулуу (кысылуу) коэффициенти болуп,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix} \text{ көрүнүштө жазылат.}$$

$$\text{Эгерде (63) функциялар} \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (61)$$

көрүнүштөгү цилиндрдик координаталарга өзгөртүп түзүү болсо, анда жаңы областта  $P$  чекити  $\rho, \varphi, z$  цилиндрдик координаталары менен сүрөттөлүшөт. Мында  $\rho, \varphi$



координаталары,  $P$  чекитин  $xOy$  координаттык тегиздиктеги проекциясы болгон  $P'$  чекитин полярдик координаталары болушат (15.23 – чийме). Ошондуктан цилиндрдик координаталарда берилген областта  $\rho, \varphi$  координаталары,  $xOy$  тегиздиги боюнча  $0 \leq \rho \leq +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

аралыктарында өзгөрүү мүмкүнчүлүктөргө ээ болсо, ал эми  $z$  вертикалдык багытта  $-\infty \leq z \leq +\infty$  аралыгында өзгөрө алат. Демек, цилиндрдик координаталар системасында  $\rho = const, \varphi = \varphi, z = z$  беттери менен чектелген область: радиусу  $\rho$ , огу  $Oz$  аппликатысы, жогорку жана төмөнкү негиздери  $xOy$  координаттык тегиздигине параллель тегиздиктер болушкан цилиндрдик телону түзөт.

Декарттык жана цилиндрдик координаталардын (61) байланышын пайдаланып,  $\Omega$  областын  $\Omega^*$  областына өзгөртүп түзүү мезгилинде көлөмдөрдүн өзгөрүү коэффициенти болгон Якобианды

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \text{ табабыз.}$$

$|J| = |\rho| = \rho$  болгондуктан ( $\rho \geq 0$ ), (60) формуладан цилиндрдик координаталарда үчтүк интегралды эсептөө

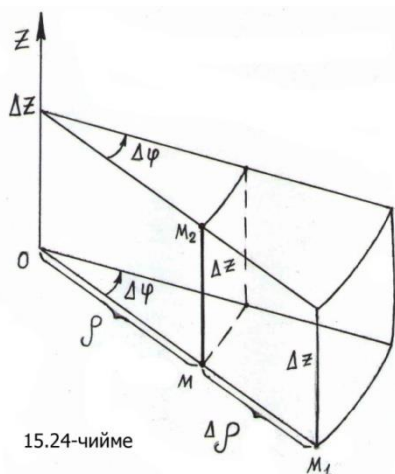
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz \quad (62)$$

эрежесин келтирип чыгарабыз. Мында  $dv = \rho d\rho d\varphi dz$  туюнтмасы цилиндрдик координаталардагы көлөмдүн элементи деп аталып, геометриялык жактан төмөндөгүдөй чечмеленет:  $\Omega$  областын

$$\rho = \rho_k = \text{const}, \varphi = \varphi_k = \text{const}, z = z_k, k = 1, 2, \dots, n$$

беттерин жардамы менен майда бөлүктөргө бөлсөк (15.24 – чийме), келип чыккан ийри сызыктуу майда призмачалардын бирөөсүн көлөмү

$$v_k = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\varphi \Delta z - \frac{1}{2}\rho^2 \Delta\varphi \Delta z = \rho \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi \Delta z$$

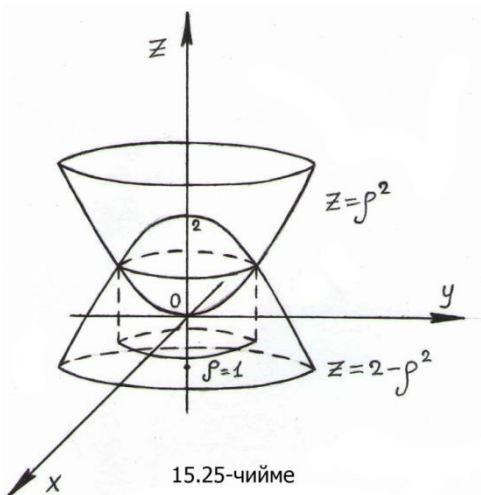


15.24-чийме

көрүнүштө эсептелип, анын жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгүн таштап жиберип башкы бөлүгүн гана алсак,

$v_k \approx \rho \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z$  келип чыгып, бөлүүлөрдүн саны чексиз көбөйгөндө цилиндрдик координаталардагы көлөмдүн элементине  $dv = \rho d\rho d\varphi dz$  тең болоруна ишенүүгө болот.

Мисал. 9)  $z = x^2 - y^2$  жана  $z = 2 - x^2 - y^2$  беттери менен чектелип турган телонун көлөмүн тапкыла (15.25 – чийме).



15.25-чийме

► Берилген тело цилиндрдик координаталарда  $z = \rho^2$  жана

$z = 2 - \rho^2$  беттери менен чектелип, бул беттер өз ара  $\begin{cases} \rho = 1 \text{ (цилиндр)}, \\ z = 1 \text{ (тегиздик)} \end{cases}$

теңдемелери менен берилген  $z$  сызыгы боюнча кесилишет. Кесилишүү

сызыгын  $xOy$  тегиздигиндеги проекциясы  $\rho = 1$ ,  $z = 0$  болот. Ошондуктан

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ жана}$$

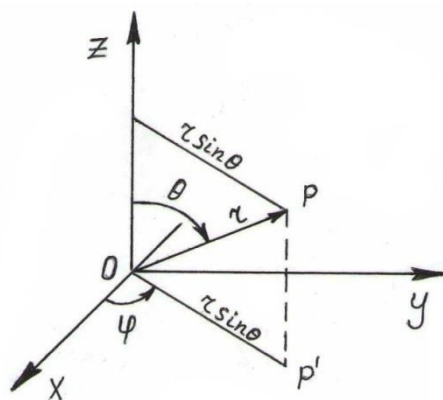
$\rho^2 \leq z \leq 2 - \rho^2$  аралыктарында өзгөрүшүп,  $f(x, y, z) \equiv 1$  болгондо (62) формуласынан изделүүчү көлөм

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = \\ &= 2\pi \int_0^1 [2 - \rho^2 - \rho^2] \rho d\rho = 4\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = 4\pi \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi, \end{aligned}$$

көлөм бирдиги болору келип чыгат. ◀

### 15.5.5 Үчтүк интегралды сфералык координаталарда эсептөө

$P(x; y; z)$  чекитин абалын сфералык координаталар системасында



15.26-чийме

$r, \varphi, \theta$  сандарын жардамы менен сүрөттөөгө болот. Мында  $r$  – саны  $O$  координата башталмасынан  $P$  чекитине чейинки аралык,  $\varphi$  – саны  $Ox$  огу менен  $\vec{OP}$  радиус – векторун  $xOy$  тегиздигиндеги проекциясын арасындагы бурч, ал эми  $\theta$  – саны  $Oz$  огуна баштап эсептелген  $Oz$  менен  $\vec{OP}$  радиус – векторун арасындагы бурч (15.26 – чийме). Бул учурда, сфералык

координаталар

$$0 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$0 \leq \theta \leq \pi$  аралыктарында өзгөрүшөт, ал эми сфералык координаталар системасында координаттык беттер:

Борбору координата башталмасы, радиусу  $r = const$  – болгон сфера;  
 $\varphi = const$  –  $Oz$  огуна чыккан жарым тегиздик;

$\theta = const$  – огу  $Oz$  аппликатаасы болгон тегерек конус

беттери болушат. Декарттык координаталардан сфералык

$$\text{координаталарга өтүү} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (63)$$

байланыш функцияларын жардамы менен жүргүзүлгөндүктөн, алардын Якобианы

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

көрүнүштө эсептелет.  $|J| = |r^2 \sin \theta| = r^2 \sin \theta$ , анткени  $0 \leq \theta \leq \pi$  аралыгында  $\sin \theta \geq 0$ . Ошентип, сфералык координаталарда (60) формуласы

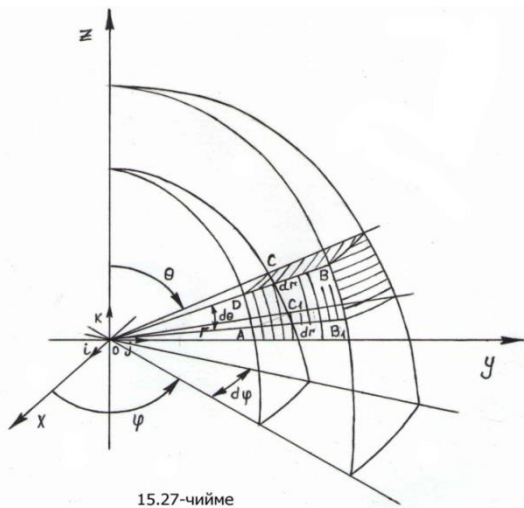
$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega^*} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (64)$$

көрүнүштө жазылат. Мында  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  сфералык координаталардагы көлөмдүн элементи деп аталып, геометриялык жактан  $\Omega$  областын  $\Omega^*$  областына өзгөртүп түзүү мезгилинде көлөмдөрдүн өзгөрүү коэффициенти болуп, областтардын көлөмдөрүн арасындагы байланышты көрсөтөт.

Охуз координаттык мейкиндигинде  $\Omega$  областын майда бөлүкчө областтарга бөлүүнүн натыйжасында түзүлгөн областтардын бирөөсүн көлөмүн эсептейли. Айталы, ал бөлүкчө область радиустары  $r$  жана  $r + dr$  болгон сфералар,  $\varphi$  жана  $\varphi + \Delta\varphi$  жарым тегиздиктери,  $\theta$  жана  $\Delta\theta$

конустары менен чектелип турсун (15.27 – чийме). Аны сезилбес каталык менен өлчөмдөрү

$DB = dr$ ,  $DC = r \sin\theta d\varphi$ ,  $AD = r d\theta$  болгон параллелепипед деп эсептесек, анда анын  $dv$  – көлөмү



$$dv = DB \cdot DC \cdot AD = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

болорун көрөбүз.

Мисал. 10)  $x^2 + y^2 = z^2$  конусунан,  
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  жана

$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  ( $a < b$ )  
концентрикалык сфералары аркылуу  
кесилип алынган  $\Omega$  томпок телосун  
көлөмүн тапкыла.

► Сфералык

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

координаталарга өтүп,  $\Omega$  телосун теңдемелеринен

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow r = a$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \Leftrightarrow r = b$  же болбосо  
 $a \leq r \leq b$  болору аныкталат. Ал эми

$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow r^2 \sin^2\theta = r^2 \cos^2\theta \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$  болуп,  
көтөрүлүү бурчу  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , айлануу бурчу  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$   
аралыктарында өзгөрүшөт. Демек, изделүүчү көлөм  $f(x, y, z) \equiv 1$   
болгон учурда, (64) формуласынан

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_a^b r^2 dr = 2\pi \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) \cdot \left(\frac{r^3}{3}\right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)(b^3 - a^3) \text{ көрүнүштө табылат. } \blacktriangleleft \end{aligned}$$



## §15.6 Үчтүк жана кош интегралдардын айрым колдонулуштары

### I. Жалпак фигуранын массасы

Айталы,  $xOy$  координаттык тегиздигинде чектелген жалпак  $D$  фигурасы берилип, анын бетиндеги  $P(x; y)$  чекиттеринде тыгыздык  $\rho = \rho(P) = \rho(x, y)$  мыйзамы менен үзгүлтүксүз бөлүштүрүлсүн ( $\rho(P) \geq 0$ ). Анда  $\rho(x, y)$  функциясын  $D$  областында берилген үзгүлтүксүз функция катарында карап, берилген бир тектүү эмес жалпак  $D$  фигурасын массасын эсептейли. Ал үчүн  $D$  фигурасын өз ара ички жалпы чекиттери жок болгон  $n$  сандагы  $D_1, D_2, \dots, D_n$  бөлүкчөлөргө бөлүп, алардын аянттарын тиешелүү түрдө  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  болсун дейли. Ар бир бөлүкчө  $D_k$  областтарынан бирден  $P_k(x_k; y_k)$  чекиттерин эркин тандап алсак, бул чекиттеги тыгыздык  $\rho(x_k, y_k)$  болушу керек. Тыгыздык үзгүлтүксүз бөлүштүрүлгөндүктөн,  $D_k$  бөлүкчөсүн  $P_k$  чекитине жетишерлик жакын жайгашкан чекиттерден түзүлгөн деп эсептеп, сезилбес каталык менен  $D_k$  бөлүкчөсүндө тыгыздыкты турактуу  $\rho(x_k, y_k)$  санына барабар деп алууга болот. Андай болсо  $D_k$  бөлүкчөсүн тыгыздыгын аянтына көбөйтүү менен, бөлүкчөнүн массасын  $m_k = \rho(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$  көрүнүштө табууга болот. Эскертилген каталыктын чегинде жалпы  $D$  фигурасын массасын  $D_k$  бөлүкчөлөрүн суммасы катарында жакындаштырылган

$$M \approx \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$$

түрдө эсептей алабыз. Түзүлгөн сумма  $D$  областы боюнча үзгүлтүксүз  $\rho(x, y)$  функциясына карата интегралдык сумма болорун байкайбыз.  $D_k$  областарын ( $1 \leq k \leq n$ ) диаметрлерин эң узунун  $d$  деп белгилеп,  $d \rightarrow 0$  умтулгандагы пределге өтсөк, анда  $D$  жалпак фигурасын накта массасы,  $\rho(x, y)$  функциясынан  $D$  областы боюнча алынган

$$M = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k = \iint_D \rho(x, y) dx dy, \quad (65)$$

кош интегралга барабар болот. Эгерде  $D$  областы бир тектүү, же областтын бардык чекиттеринде  $\rho(x, y) = \text{const}$  болсо, анда (65) формуласын

$$M = \rho \iint_D dx dy = \rho \cdot S$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында  $S$  – жалпак  $D$  фигурасын аянты.

Мисал. 11) Радиустары  $r$  жана  $R$  болгон концентрикалык айланалар менен чектелген ( $r \leq R$ ) шакекченин ар бир чекитиндеги тыгыздык, ошол чекиттен айланалардын борборуна чейинки аралыкка тескери пропорционалдуу, ал эми ички тегеректин айланасын чекиттеринде 1 ге барабар деп эсептеп, шакекченин массасын тапкыла.

► Бул учурда шакекче көрүнүштөгү  $D$  областы (фигурасы), полярдык координаталар системасында  $r \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  шарттары менен сүрөттөлөт. Мында  $\rho$  – шакекчедеги чекиттен  $O$  борборуна (полюсуна) чейинки аралык,  $\varphi$  – шакекчедеги чекиттин  $O$  полюсуна карата айлануу бурчу. Шакекчедеги ар бир  $(x; y)$  чекитиндеги тыгыздыкты  $\mu$  десек, аны

$\mu(x, y) = \mu^*(\varphi, \rho) = \frac{r}{\rho}$  функциясы менен берүүгө болот. Демек шакекченин массасы (65) формуласына ылайык,

$$M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_{D^*} \frac{r}{\rho} \cdot \rho d\varphi d\rho = r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R d\rho = 2\pi r(R - r)$$

санына барабар. ◀

## **II. Жалпак фигуралардын координаттык окторго салыштырмалуу статикалык моменттери. Оордук борбордун координаталары**

*Массасы  $t$  болгон материалдык  $(x; y)$  чекитин  $Ox$  координата огуна салыштырмалуу статикалык моменти деп,  $t$  массасы менен  $y$  ординатасын көбөйтүндүсүнө барабар болуп,  $M_x$  – тамгасы менен белгиленген  $M_x = t \cdot y$  санын айтабыз. Ошондой эле  $(x; y)$  чекитин*

Оу огуна салыштырмалуу статикалык моментин  $M_y = m \cdot x$  көрүнүштө жазабыз.

Айталы,  $D$  материалдык областын (жалпак фигурасын) ар бир  $P(x; y)$  чекиттеринде беттик тыгыздык  $\rho = \mu(x, y)$  үзгүлтүксүз функциясы менен берилсин.  $D$  областын аянттарын тиешелүү түрдө  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  болгон  $n$  сандагы  $D_1, D_2, \dots, D_n$  бөлүкчө областтарга бөлүп, алардын ар биринен эркин ыкмада массалары  $m_1, m_2, \dots, m_n$  болгон материалдык  $P_k(x_k; y_k)$  чекиттерин алалы ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Анда жетишерлик кичине  $D_k$  бөлүкчө областын массасын, сезилбес каталык менен  $P_k$  чекитине топтоштурулган деп алып,

$m_k = \mu(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$  көрүнүштө эсептөөгө болот. Бул учурда, жакындаштырып  $P_k$  чекити деп элестетилген  $D_k$  бөлүкчөсүн  $Ox$  координаттык огуна салыштырмалуу статикалык моментин,

$$M_{kx} \approx y_k \cdot m_k = y_k \cdot \mu(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$$

көрүнүштө табууга болот.

Жалпы  $D$  материалдык областын  $Ox$  огуна салыштырмалуу статикалык моментин жакындаштырылган түрдө,  $D_k$  бөлүкчө областарын статикалык моменттерин суммасы катарында

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n y_k \cdot \mu(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k \quad (66)$$

карайбыз. Эгерде (66) суммасынан бөлүкчө  $D_k$  областарын диаметрлерин эң узуну  $d \rightarrow 0$  умтулгандагы пределге өтсөк, анда жалпы  $D$  областынын  $Ox$  огуна салыштырмалуу статикалык моменти

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy \quad (67)$$

кош интегралы менен эсептелет. Ошондой эле  $D$  областынын  $Oy$  огуна салыштырмалуу статикалык моменти

$$M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy \quad (68)$$

формуласы менен эсептелет.

Эгерде массасы  $m$ , аянты  $S$  болгон  $D$  жалпак фигурасын  $M_x$  жана  $M_y$  статикалык моменттери белгилүү болсо, анда бул фигуранын оордук борбору

$$x_c = \frac{\iint_D x \mu(x, y) dx dy}{m} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \mu(x, y) dx dy}{m} = \frac{M_x}{m} \quad (69)$$

координаталарына ээ болот. Эгерде тыгыздык  $\mu(x, y) = const$  болсо, анда  $m = \mu \cdot S$  болгондуктан (69) формулаларын

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{S} \quad (70)$$

көрүнүштөрдө жаза алабыз.

Мисал. 12)  $y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  косинусоидасын  $Ox$  жана  $Oy$  координаттык октору менен кесилишкен бөлүгүнөн пайда болгон, бир тектүү жалпак фигуранын оордук борборун координаталарын тапкыла.

► Берилген фигура бир тектүү болгондуктан, тыгыздык  $\mu(x, y) = \mu - const$  турактуу чоңдук болуп, (70) формулаларын колдонобуз. Ошондуктан, оболу фигуранын аянтын табалы

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Андай болсо,  $M_x$  жана  $M_y$  статикалык моменттерин

$$M_x = \iint_D y \mu dx dy = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} y dy = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\cos x} \right) dx =$$

$$= \frac{\mu}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{\mu}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{\mu}{4} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \mu}{8};$$

$$M_y = \iint_D x \mu \, dx \, dy = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx \int_0^{\cos x} dy = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x - 0) \, dx =$$

$$= \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x \quad dx, v = \sin x \end{array} \right| = \mu(x \cdot \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi \mu}{2} - \mu = \mu \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ эсептеп чыгып (69), (70)}$$

формулалардан ( $S = 1$ ) оордук борборлорун координаталарын

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \mu \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{1}{\mu S} = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{\pi \mu}{8}}{\mu S} = \frac{\pi \mu}{\mu S 8} = \frac{\pi}{8}$$

көрүнүштөрдө табабыз. ◀

### III. Жалпак фигуралардын координаттык окторго салыштырмалуу инерция моменттери

Массасы  $m$  болгон материалдык  $(x; y)$  чекитин  $Ox$  координата огуна салыштырмалуу инерция моменти деп:  $I_x$  — тамгасы менен белгиленип, чекиттин  $m$  массасы менен чекиттен  $Ox$  огуна чейинки аралыктын квадратына көбөйткөнгө барабар болгон,  $I_x = m \cdot y^2$  саны айтылат (айтылган аралык чекиттин  $y$  ординатасына барабар). Ошондой эле  $(x; y)$  материалдык чекитин  $Oy$  огуна салыштырмалуу инерция моменти  $I_y = m \cdot x^2$  көрүнүштө жазылат.

$D$  жалпак фигурасын беттиндеги тыгыздык  $\rho = \mu(x, y)$  үзгүлтүксүз функциясы менен таралса, анда жогорудагыдай ыкмаларды колдонуп,  $D_k$  бөлүкчө областардын координаттык окторго салыштырмалуу инерция моменттерин

$$I_{k_x} = y_k^2 \cdot m_k = y_k^2 \mu(x_k, y_k) \Delta S_k, \quad I_{k_y} = x_k^2 \cdot m_k = x_k^2 \mu(x_k, y_k) \Delta S_k$$

эсептеп, жалпы  $D$  областын координаттык окторго салыштырмалуу инерция моментин, алардын суммасын  $d \rightarrow 0$  умтулгандагы пределдик мааниси катарында

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad (71)$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy \quad (72)$$

көрүнүштөрдөгү формулалар менен эсептелет.

#### IV. Телолордун массаларын эсептөө

$R^3$  мейкиндигинде жайгашкан бир тектүү эмес  $\Omega$  телосу (областы) берилип, анын ар бир  $(x; y; z)$  чекитинде тыгыздык  $\rho = \mu(x, y, z)$  үзгүлтүксүз функциясы менен өзгөрүп олтурсун. Анда  $\Omega$  областын массасын

$$m = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (73)$$

үчтүк интегралы менен эсептөөгө болот.

Мисал. 13)  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  жана  $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$  ( $a < b$ ) жарым сфералары жана  $xOy$  тегиздиги менен чектелген телонун  $(x; y; z)$  чекитиндеги тыгыздык, чектиттен  $O$  координата башталмасына чейинки арлыкка пропорционалдуу болсо, анда телонун  $m$  массасын тапкыла.

►  $O$  координата башталмасынан чекитке чейинки аралык

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  санына барабар болгондуктан,  $(x; y; z)$  чекитиндеги тыгыздыкты  $\rho = \mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  функциясы менен берилет десек болот ( $k > 0$  – пропорционалдуулук коэффициентти). Андай болсо, берилген телонун көлөмү (73) формуласы боюнча

$$m = k \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

үчтүк интегралын эсептөө аркылуу табылат. Аны эсептөө үчүн сфералык координаталарга өтүп,  $\Omega$  областын чек араларын сфералык координаталарда  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  аныктайбыз. Якобианды  $J = r^2 \sin\theta$  эске алып, үчтүк интегралды эсептесек

$$m = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_a^b r^3 dr = 2\pi k \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) \left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi k}{2} (b^4 - a^4) \text{ изделүүчү массаны табабыз. } \blacktriangleleft$$

## V. Телолордун координаттык тегиздиктерге салыштырмалуу статикалык моменттери. Оордук борборлору

$R^2$  мейкиндигиндеги жалпак фигуралардын координаттык окторго салыштырмалуу статикалык моменттери жана оордук борборлору (67) – (70) кош интегралдарын жардамы менен эсептелген эле.

$R^3$  мейкиндигиндеги  $\Omega$  материалдык телонун ар бир  $(x; y; z)$  чекитиндеги тыгыздык  $\rho = \mu(x, y, z)$  үзгүлтүксүз функциясы менен берилсе, анда  $\Omega$  телосун координаттык тегиздиктерге салыштырмалуу статикалык моменттери жана оордук борборлорун координаталары да  $R^2$  мейкиндигиндегидей эле ыкмалар боюнча табылып, үчтүк интеграл менен эсептелет. Мисалы,  $\Omega$  областын  $n$  сандагы майда  $\Omega_k$  бөлүкчөлөргө бөлүп, алардын бирөөсүн массасын  $dm$ , көлөмүн  $dv$  десек, анда  $\Omega_k$  – бөлүкчө телонун  $xOy$  координаттык тегиздигине салыштырмалуу статикалык моментин

$$M_{kxy} = z_k \cdot dm = z_k \cdot \mu(x_k, y_k, z_k) dv = z \cdot \mu(x_k, y_k, z_k) dx dy dz$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Мындан жалпы  $\Omega$  материалдык телосун  $xOy$  координаттык тегиздигине салыштырмалуу статикалык моментин

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (74)$$

көрүнүштө, ал эми  $yOz$  жана  $xOz$  координаттык тегиздиктерине салыштырмалуу статикалык моменттер тиешелүү түрдө

$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (75)$$

$$M_{xz} = \iiint_{\Omega} y \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (76)$$

формулалары менен эсептөөгө болорун көрөбүз.

Эгерде  $\Omega$  телосун  $m$  массасы менен статикалык моменттери белгилүү болсо, анда анын оордук борборун координаталарын

$$\begin{cases} x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz}{m} = \frac{M_{yz}}{m}, \\ y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz}{m} = \frac{M_{xz}}{m}, \\ z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz}{m} = \frac{M_{xy}}{m} \end{cases} \quad (77)$$

көрүнүштөрдө жаза алабыз. Эгерде  $\rho = \mu(x, y, z) = \mu - const$  болсо, анда (77) формуласын жөнөкөйлөтүп,

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x dx dy dz}{V}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y dx dy dz}{V}, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{V} \quad (78)$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында  $V$  берилген  $\Omega$  телосун көлөмү.

Мисал. 14) Радиусу  $R$  болгон бир тектүү жарым шардын оордук борборун тапкыла.

► Жарым шар бир тектүү материалдык тело болгондуктан  $\rho = \mu - const$  болуп, (78) формулаларын пайдаланабыз. Жарым шардын көлөмү  $V = \frac{2}{3} \pi R^3$  санына барабар. Жарым шардын борбору  $O$  координата башталмасында жайгашып,  $xOy$  тегиздигин үстүндө жатсын дейли. Бул учурда тело  $yOz$ ,  $xOz$  координаттык тегиздиктерине салыштырмалуу симметриялуу жайгашкандыктан, аларга салыштырмалуу оордук борборлорун координаталары  $O$  башталмасында жатууга тийиш, б.а.  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ . Ал эми



$$z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{V} \text{ болгондуктан, оболу алымындагы интегралды}$$

$$\text{эсептеп алалы: Сфералык } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases} \text{ координаталарга өтсөк,}$$

берилген жарым шар

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq R$  аралыктарында чектелген фигура болот. Көлөмдөрдү өзгөртүп түзүүдөгү чен айырмачылыгы

$J = r^2 \sin \theta$  Якобианы менен теңдештирилет. Ошондуктан интегралдын

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta d\theta \int_0^R r^2 \sin \theta dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta) = \\ &= \frac{\pi R^4}{2} \left( \frac{(\sin \theta)^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi R^4}{4} \left( \sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right) = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

сандык маанисин таап, оордук борборун үчүнчү

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R \text{ координатасын аныктап, жарым шардын оордук борбору } \left( 0; 0; \frac{3}{8} R \right) \text{ координаталуу чекит болорун көрөбүз. } \blacktriangleleft$$

## § 15.7 Чектелбеген областтар боюнча эселүү интегралдарды эсептөө

Эки өзгөрүлмөлүү функциялардан чектелбеген  $D$  областы боюнча боюнча интеграл алуу үчүн,  $D$  областында кармалышып сырт тарабынан чектелишкен, бири – бирине сыртынан ырааттуу

$$\{D_n\} = D_1, D_2, \dots, D_n, \dots \quad (D_1 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D)$$

кийиштирилип олтуруп, пределдик абалда  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$  областы менен дал келет деп элестетилген областчалардын  $\{D_n\}$  удаалаштыгын түзөбүз.

Мисалы,  $D$  деп бүтүндөй  $xOy$  тегиздигин алсак, анда  $D_n$  деп борбору  $O$  координата башталмасында жайгашкан, радиустары  $r_n$  болгон концентрикалык тегеректерди алууга болот

$D_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r_n^2\}$ ,  $r_n \leq r_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Мында  $n \rightarrow \infty$  умтулганда радиустар да улам узарып  $r_n \rightarrow \infty$  олтуруп, пределдик абалда  $xOy$  тегиздиги менен дал келет.

**15.4 Аныктама.** Эгерде  $D_n$  удаалаштыктарын кандай тандалышына көз каранды болбостон

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \text{ пределин чектелген мааниси жашаса,}$$

анда ал маанини  $f(x, y)$  функциясынан  $D$  чектелбеген областы боюнча алынган өздүк эмес кош интеграл деп атап, аны жыйналуучу дейбиз.

Эгерде пределди эсептөөгө мүмкүн болбосо же мааниси жашабаса, анда аны таралуучу өздүк эмес кош интеграл дейбиз.

Ошентип, аныктама боюнча өздүк эмес кош интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \quad (79)$$

көрүнүштө жазылат. Мында ар бир  $D_n$  областтарында  $f(x, y)$  интегралдануучу функция деп алынат.

Мисал. 15) Бүтүндөй тегиздик менен дал келген

$D = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$  областы боюнча өздүк эмес

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{ интегралын эсептегиле.}$$

► Бири – бирине сыртынан кийиштирилген  $D_n$  областтарын удаалаштыгы катарында борбору координата башталмасында жайгашкан, радиустары  $n$  сандары болгон концентрикалык  $x^2 + y^2 \leq n^2$  тегеректерин алалы ( $n = 1, 2, \dots$ ).  $D_n$  областтарын ар бири чектелген жана аларда  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$  функциясы

интегралдануучу. Анын интегралын полярдык координаталарда эсептейли:

$$\iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq n; \\ J = \rho d\rho \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + 1)^2} =$$

$$= \pi \int_0^n \frac{d(\rho^2 + 1)}{(\rho^2 + 1)^2} = -\pi \left( \frac{1}{\rho^2 + 1} \right) \Big|_0^n = \pi \left( 1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right).$$

Мындан (83) формуласын пайдаланып

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right) = \pi,$$

берилген өздүк эмес кош интегралдын жыйналуучу экендигин көрөбүз. ◀

**Эскертүү.** Эселүү өздүк эмес интегралдар да сызыктуу өздүк эмес интегралдар ээ болгон бардык касиеттерге, салыштыруу теоремаларына баш ийип, чектелбеген телолор боюнча үч, төрт, ... эселүү өздүк эмес интегралдарды эсептөө да, (79) ыкмасына окшош жүргүзүлөт.

## Көнүгүүлөр

1. Төмөндөгү кайталануучу жана кош интегралдарды эсептегиле:

а)  $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$ ; б)  $\int_0^a dx \int_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} (x^2 + y^2) dy$ ; в)  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr$ ;

г)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$ ;

д) (P) областы  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x + y = 2$  түздөрү менен чектелген болсо,

$\iint_{(P)} (x - y) dx dy$  кош интегралын эсептегиле;

е) (P) областы  $y = x$ ,  $x = 2$ ,  $xy = 1$  сызыктары менен чектелсе, анда

$\iint_{(P)} \frac{x^2}{y^2} dx dy$  кош интегралын эсептегиле;

ж) (P) областы  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = \pi$  түздөрү менен чектелсе,

$\iint_{(P)} \cos(x + y) dx dy$  кош интегралын эсептегиле.

2. Берилген функциялардын көрсөтүлгөн аралыктардагы орточо маанилерин тапкыла:

а)  $[0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi]$  квадратында  $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$  функциясын;

б) Ox огу жана  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  айланасын жогорку жарымы менен чектелген область боюнча  $f(x, y) = x \cdot y$  функциясын.

3. Полярдык координаталарга өтүү менен төмөндөгү интегралдарды эсептегиле:

а)  $\iint_{(P)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$ , мында (P):  $x^2 + y^2 \leq rx$  – айланасы;

б)  $\iint_{(P)} y dx dy$ , мында (P) областы радиусу  $a$ , борбору  $(a; 0)$  болгон

жарым тегеректин жогорку бөлүгү.

в)  $\iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy$ , мында (P) областы  $x^2 + (y + 2)^2 \leq 4$  айланасы;

г)  $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy$ .

4. Берилген ийрилер менен чектелген жалпак фигуралардын аянттарын эсептегиле.

а)  $xy = 4$ ,  $x + y - 5 = 0$  сызыктары менен;

б)  $y = x$ ,  $y = 5x$ ,  $x = 1$  түздөрү менен;

в)  $y^2 = 10x + 25$ ,  $y^2 = -6x + 9$  ийрилери менен;

г)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ; д)  $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y$  ийрилери менен.

5. Берилген беттер менен чектелген телолордун көлөмдөрүн

эсептегиле.

а) Координаттык жана  $x = 4$ ,  $y = 4$  тегиздиктери менен  $z = x^2 + y^2 + 1$  параболоидин айлануусунан келип чыккан беттердин кесилишинен келип чыккан телонун;

б) Координаттык тегиздиктер менен  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  тегиздигин кесилишинен пайда болгон пирамиданын;

в) Координаттык жана  $2x + 3y - 12 = 0$  тегиздиктери менен  $z = \frac{y^2}{2}$  цилиндрин кесилишинен келип чыккан телонун;

г)  $z = 4 - y^2$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$  цилиндрлери жана  $z = 0$  тегиздиги менен чектелген телонун көлөмүн;

д)  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  сферасынан  $x^2 + y^2 = rx$  цилиндри аркылуу кесилип алган телонун;

е)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x}$  цилиндрлери менен  $z = 0$ ,  $z + x = 6$  тегиздиктерин кесилишинде пайда болгон телонун;

ж)  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = x^2 + y^2$ ,  $2x = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$  беттери менен чектелген телонун (полярдык координаталарга өткүлө).

6. Беттердин аянтын тапкыла.

а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  тегиздигин координаттык тегиздиктер менен чектелген бөлүгүн аянтын тапкыла;

б)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  сферасын,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b \leq a$ ) цилиндри менен чектелген бөлүгүнүн бетинин аянтын эсептегиле.

7. Берилген үчтүк интегралдарды көрсөтүлгөн телолор боюнча эсептегиле:

а)  $\iiint_{(V)} (x + y + z) dx dy dz$ , мында  $V: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ;

б)  $\iiint_{(V)} \rho \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ , мында  $V: 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ;

в)  $\iiint_{(V)} x dx dy dz$ , мында  $V: x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a$

г)  $\iiint_{(V)} xy^2z^3 dx dy dz$ , мында  $V: z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ ,

беттери менен чектелген телолор.

8. Төмөндөгү бир тектүү жалпак фигуралардын оордук борборлорун координаталарын аныктагыла:

а) Радиусу  $R$  болгон жарым айлананын;

б)  $y = 2x^3$  жана  $y^2 = 2x$  ийрилери менен чектелген фигуранын;

в)  $y = 2x - 3x^2$  жана  $Ox$  огу менен чектелген фигуранын.

9. Төмөндөгү фигуралардын инерция моменттерин тапкыла:

а)  $x + y = 2, x = 2, y = 2$  түздөрү менен чектелген үч бурчтуктун  $Ox$  огуна салыштырмалуу;

б) Тегеректин инерция моментин, анын борборуна салыштырмалуу.

Жооптор: 1. а)  $\frac{25}{24}$ ; б)  $\frac{344}{105}a^4$ ; в)  $\frac{\pi a^2}{2}$ ; г)  $\frac{\pi}{6}$ ; д)  $\frac{2}{3}$ ; е)  $\frac{9}{4}$ ; ж)  $-2$ .

2. а)  $\frac{1}{4}$ ; б)  $\frac{4}{3\pi}$ ;

3. а)  $\frac{r^2}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$ ; б)  $\frac{a^3}{12}$ ; в)  $24\pi$ ; г)  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

4. а)  $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$ ; б)  $2$ ; в)  $\frac{16}{3}\sqrt{15}$ ; г)  $2a^2$ ; д)  $27\pi$ .

5. а)  $186 \frac{2}{3}$ ; б)  $\frac{abc}{6}$ ; в)  $16$ ; г)  $12 \frac{4}{21}$ ; д)  $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right)r^3$ ; е)  $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ ; ж)  $\frac{45\pi}{32}$ .

6. а)  $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$ ; б)  $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$ .

7. а)  $\frac{1}{2}(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ ; б)  $\pi$ ; в)  $\frac{a^3h}{6}$ ; г)  $\frac{1}{364}$ .

8. а)  $\xi = 0, \eta = \frac{4R}{3\pi}$ ; б)  $\xi = \frac{1}{5} : \left(\frac{2\sqrt{2}}{10\sqrt{8}} - \frac{2\sqrt{2}}{2^5\sqrt{16}}\right), \eta = \frac{5}{14} \sqrt[5]{\frac{1}{4}} : \left(\frac{2\sqrt{2}}{10\sqrt{8}} - \frac{2\sqrt{2}}{2^5\sqrt{16}}\right)$ ;

в)  $\xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{2}{15}$ .

9. а)  $I_x = 4$ ; б)  $\frac{\pi r^4}{2}$ .

## XVI ГЛАВА. ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ЖАНА БЕТТИК ИНТЕГРАЛДАР

### § 16.1 Биринчи түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интегралдар

#### 16.1.1 I – түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интеграл аппаратын түзүү

$xOy$  координаттык тегиздигинде  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1$

параметрдик теңдемеси менен берилген  $AB$  ийрисин карайлы. Эгерде  $AB$  ийрисин ар бир чекитинен ага жаныма сызык жүргүзүүгө мүмкүн болсо, б.а.  $[t_0, t_1]$  кесиндисинде  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  функциялары  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болуп, туундулары

$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$  (экөөсү бир учурда нөл эмес) шартына баш ийсе, анда  $AB$  ийрисин жылмакай деп айтабыз. Ал эми кесиндинин чектүү сандагы чекиттеринде аталган туундулар жашабаса, же ошол чекиттерде экөөсү тең бир учурда нөлгө айланышса, анда  $AB$  ийрисин бөлүкчө – жылмакай дейбиз.

Айталы,  $xOy$  тегиздигинде берилген  $D$  жалпак областында жайгашкан  $AB$  жылмакай же бөлүкчө – жылмакай ийриси берилип,  $AB$  ийрисин же аны толугу менен кармап турган  $D$  областын  $M(x; y)$  чекиттеринде,  $f(M)$  функциясы аныкталсын дейли.  $AB$  ийрисин

$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$  чекиттерин жардамы менен  $n$  сандагы майда бөлүкчө – жаачаларга бөлөлү (16.1 – чийме). Ар бир  $A_k \overline{A_{k+1}}$  жаачаларынан эркин түрдө бирден  $M_k(x_k; y_k)$  чекитин тандап,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k \quad (1)$$

суммасын түзүп, аны  $f(M)$  функциясы үчүн ийринин жаасынын узундугу боюнча түзүлгөн интегралдык сумма деп эсептейли. Мында  $\Delta l_k$  саны  $A_k \overline{A_{k+1}}$  жаачасын узундугу болсун. Бардык

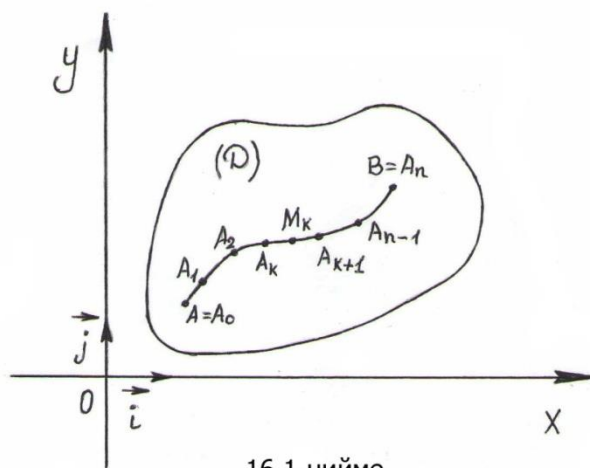
бөлүкчө – жаачалардын узундуктарын эң чоңун  $\Delta l = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{\Delta l_k\} \Delta l$

деп белгилейли.

**16.1 Аныктама.** Эгерде  $AB$  ийриси кандай ыкма менен майда жаачаларга бөлгөнүбүзгө жана  $\overline{A_k A_{k+1}}$  жаачаларынан  $M_k$  чекитин кандай тандаганыбызга көз каранды болбостон,  $\Delta l \rightarrow 0$  умтулганда (1) интегралдык суммасын чектүү предели жашаса, анда ал пределдин мааниси,  $f(M)$  функциясынан  $AB$  ийриси боюнча алынган **I – түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интеграл** деп аталып,

$$\int_{AB} f(M) dl \quad \text{же} \quad \int_{AB} f(x, y) dl \quad \text{символдору менен белгиленет.}$$

Ошентип,  $\int_a^b f(x) dx$  анык интегралы  $x \in [a, b]$  кесиндисиндеги ар бир  $x_k$  чекиттериндеги  $f(x_k)$  маалыматтарына таянып, жалпы кесинди боюнча маалыматтарды жыйноочу математикалык аппарат болсо, кош интеграл  $D$  жалпак областын ар бир  $(x_k; y_k)$  чекиттериндеги  $f(x_k, y_k)$  маалыматтарын суммалап, жалпы  $D$  областы боюнча  $f(x, y)$  ке жыйналган маалыматтарды берет. Үчтүк интеграл болсо,  $\Omega$  телосун ар бир  $(x_k; y_k; z_k)$  чекиттериндеги маалыматтарды жыйнаштырып,  $f(x, y, z)$  функциясы менен моделдештирилген кубулушка карата,



жалпы  $\Omega$  телосу боюнча маалымат топтоочу аппарат болот. Ал эми  $AB$  ийриси боюнча  $f(M) = f(x, y)$  функциясын ийри сызыктуу интегралы,  $AB$  ийрисине таандык болгон гана, ар бир  $M_k$  чекиттериндеги  $f(M_k)$  маалыматарынан курап, жалпы  $AB$  ийриси боюнча маалымат топтоочу математикалык аппарат болуп эсептелет. Ошондуктан

ийри сызыктуу интеграл аппаратында,  $f(x, y)$  функциясы  $AB$  ийрисиндеги  $(x; y)$  чекиттеринде аныкталып, аны бойлоп гана өзгөрө



алат деп эсептейбиз. Ийри сызыктуу интеграл 16.1 – аныктамасына ылайык,

$$\int_{AB} f(M)dl = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k \quad (2)$$

эрежеси менен эсептелет.

Мисал. 1) Эгерде кайсы бир материалдык ийри,  $L$  жылмакай ийрисин бойлоп жайгашса, ал эми анын ар бир  $(x; y)$  чекиттериндеги сызыктуу өзгөрүлмө тыгыздык  $\rho = \mu(x, y)$  функциясы боюнча бөлүштүрүлгөнү белгилүү болсо, анда ийринин  $m$  массасын тапкыла.

►  $L$  ийрисин  $n$  сандагы жетишерлик кичине майда бөлүкчө – жаачаларга бөлүп, сезилбес каталык кетирүү менен ар бир жаачадагы тыгыздыкты турактуу деп ойлосо, анда бир  $k$  – жаачасын массасын жакындаштырып  $\rho_k \approx \mu(x_k, y_k) \cdot \Delta l_k$  көрүнүштө табууга болот. Жалпы  $L$  ийрисин массасы

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \mu(M_k) \Delta l_k \quad \text{болуп, анын катасыз мааниси}$$

$$m = \int_{AB} \mu(M)dl \quad (*)$$

ийри сызыктуу интегралы менен эсептелерин байкайбыз. ◀

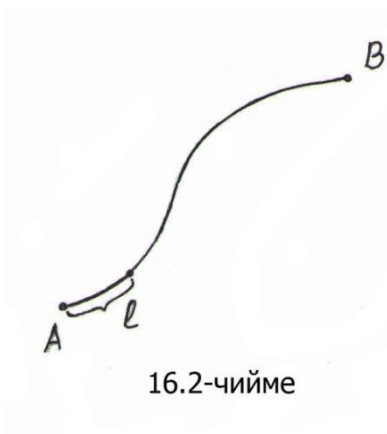
### 16.1.2 I – түрдөгү (роддогу) ийри сызыктуу интегралдын жашоо шарттары

Узундугу  $L$  болгон  $AB$  ийрисинде  $l$  параметри деп,  $A$  чекитинен ийриде кыймылдап өзгөрүүчү чекитке чейинки аралыктын узундугу болгон  $l$  санын алалы (16.2 - чийме). Анда ийри боюнча кыймылда болгон чекиттерге карата  $AB$  ийрисин теңдемесин

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \end{cases} \quad 0 \leq l \leq L, \quad (3)$$

көрүнүштөгү параметрдик теңдеме менен жазууга болот. АВ ийрисиинде берилген  $f(x, y)$  функциясы, параметрдик теңдемелерге өткөндө

$f(x(l), y(l)) = F(l)$  көрүнүштөгү  $l$  ден гана көз каранды болгон бир өзгөрүлмөлүү функцияга айланат.



АВ ийрисин  $k$  – жаачасына таандык болгон  $M_k(x_k; y_k)$  чекитине  $l_k$  параметри туура келсин, б.а. айтканда бул чекит А башталмасынан  $l_k$  аралыгындагы узактыкта жайгашсын ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

(1) – интегралдык сумманы  $l_k$  параметрлерине карата

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(l_k), y(l_k)) \Delta l_k = \sum_{k=0}^{n-1} F(l_k) \Delta l_k \quad (4)$$

көрүнүштө көчүрүп жазалы. Анда (4) интегралдык суммасы, пределдик абалда

$$\int_0^L F(l) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl$$

көрүнүштөгү анык интегралды аныктайт. (1) жана (4) интегралдык суммалары бир эле сумманын, ар кандай жазылыштары катарында тең болушкандыктан, алардын пределдери да тең болушуп, (3) параметрдик теңдемеси менен берилген АВ ийриси боюнча алынган ийри сызыктуу интеграл

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl \quad (5)$$

сызыктуу анык интегралга келтирүү менен эсептелет. Бул учурда ийри сызыктуу интегралдын жашоо шарты, анык интегралдын жашоосунан көз каранды болуп, ийринин  $M$  чекиттеринде  $f(M) = f(x(l), y(l))$  функциясын үзгүлтүксүз болушу талап кылынат. Аны теорема көрүнүштө жазалы.

**16.1 Теорема.** Эгерде  $f(M)$  функциясы жылмакай  $AB$  ийрисин бойлогон  $M$  чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, анда  $AB$  ийриси боюнча алынган

$$\int_{AB} f(M)dl$$

$I$  – роддогу ийри сызыктуу интегралы жашайт.

(Себеби, ушул шартта гана (5) тин оң жагындагы анык интеграл жашайт)

### 16.1.3 $I$ – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдардын негизги касиеттери

**1<sup>0</sup>.**  $AB$  ийрисин узундугу болгон  $L$  саны, ийрини кайсы учунан баштап жаачаларга бөлүп суммалаганыбызга карабастан өзгөрбөй кала бергендиктен, (1) суммасы жана анын пределдик мааниси өзгөрбөйт. Ошондуктан ийри сызыктуу интеграл, интегралдоо багытынан көз каранды болбойт

$$\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl.$$

**2<sup>0</sup>.** **Сызыктуулук касиети.** Эгерде  $AB$  ийриси боюнча  $f(M)$  жана  $g(M)$  функцияларын ийри сызыктуу интегралдары жашашса, анда  $\forall \alpha, \beta \in R$  чыныгы сандары үчүн  $\alpha \cdot f(M)$ ,  $\beta \cdot g(M)$  функцияларын да  $AB$  ийриси боюнча ийри сызыктуу интегралдары жашап,

$$\int_{AB} [\alpha \cdot f(M) + \beta \cdot g(M)]dl = \alpha \cdot \int_{AB} f(M)dl + \beta \cdot \int_{AB} g(M)dl$$

теңдештиги орун алат.

Бул касиет интегралдык суммалардын жана пределдин сызыктуулугунан келип чыгат.

**3<sup>0</sup>. Аддитивдүүлүк касиети.** Эгерде АВ ийриси АС жана СВ бөлүктөрүнөн турса жана  $f(M)$  функциясын АВ ийри боюнча ийри сызыктуу интегралы жашаса, анда  $f(M)$  функциясы АС жана СВ ийрилери боюнча да интегралдануучу болуп,

$$\int_{AB} f(M)dl = \int_{AC} f(M)dl + \int_{CB} f(M)dl$$

барабардыгы аткарылат.

**4<sup>0</sup>.** Эгерде  $f(M) \geq 0$  болсо, анда

$$\int_{AB} f(M)dl \geq 0 \text{ барабарсыздыгы аткарылат.}$$

**5<sup>0</sup>.** Эгерде  $f(M)$  функциясы АВ ийрисинде интегралдануучу болсо, анда  $|f(M)|$  функциясы да АВ ийрисинде интегралдануучу болуп

$$\left| \int_{AB} f(M)dl \right| \leq \int_{AB} |f(M)| dl$$

барабарсыздыгы аткарылат.

**6<sup>0</sup>. Орточо маани жөнүндөгү формула.** Эгерде  $f(M)$  функциясы АВ ийрисин бойлото үзгүлтүксүз болсо, анда АВ ийрисинен кандайдыр бир  $M_c$  чекити табылып,

$$\int_{AB} f(M)dl = f(M_c) \cdot L$$

теңдештиги орун алат. Мында  $L$  саны АВ ийрисинин узундугу.

#### 16.1.4 I – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды эсептөө

Айталы, АВ ийриси  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t_0 \leq t \leq t_1$  параметрдик

теңдемеси менен берилип, А чекити параметрдин  $t = t_0$ , ал эми В чекити  $t = t_1$  маанилерине туура келсин. Ал эми  $\varphi(t)$  жана  $\psi(t)$  функцияларына биринчи тартиптеги  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болушуп,  $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$  (бир учурда туундуларын экөөсү тең нөл болбосун) шарттары коюлсун. Анда ийринин жаасын дифференциалы (12.4.4, (41) – формула)

$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$  формуласы менен эсептелгендиктен, (5) формуласы

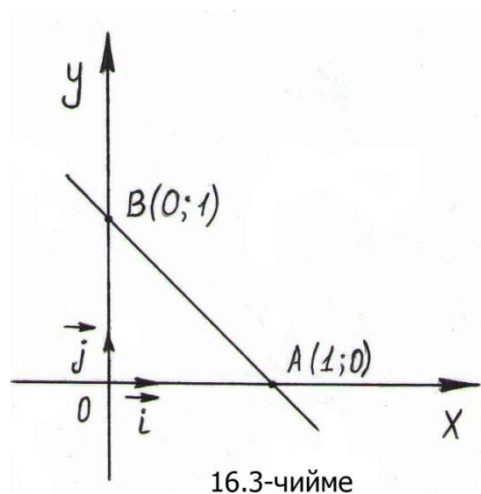
$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (6)$$

көрүнүштөгү эсептөө эрежесине айланат.

Эгерде АВ ийриси,  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү  $y = g(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  айкын функциясы менен берилип, А чекитинде  $x = a$ , ал эми В чекитинде  $x = b$  маанилерин кабыл алса, анда (6) эрежесин

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx \quad (7)$$

көрүнүшкө келтирүүгө болот.



Мисал.

2) Чокулары  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$  чекиттеринде жайгашкан үч бурчтуктун жактарынын контуру боюнча

$f(x, y) = x + y$  функциясын ийри сызыктуу интегралын эсептегиле (16.3 – чийме).

► Үч бурчтуктун жактарынын контурун  $L$  ийриси деп аны үч  $OA$ ,  $AB$ ,  $BO$  бөлүктөрдөн турат дейли, анда

аддитивдүүлүк касиети боюнча ийри сызыктуу интегралды

$$\int_L (x + y)dl = \int_{OA} (x + y)dl + \int_{AB} (x + y)dl + \int_{BO} (x + y)dl$$

көрүнүштөрдө ажыратып эсептөөгө болот.

а) OA ийриси боюнча эсептейли: OA жагын теңдемеси  $y = 0$  болуп,  $x$  өзгөрүлмөсү  $0 \leq x \leq 1$  аралыгында өзгөрөт. Анда  $dl = dx$  келет болуп

$$\int_{OA} (x + y)dl = \int_0^1 (x + 0)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{ ээ болобуз.}$$

б) Эки чекиттер аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси катарында AB жагын теңдемеси  $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow y = 1 - x$  көрүнүштө табылат.  $\Leftrightarrow y' = -1$ ,  $dl = \sqrt{1 + [y']^2} dx = \sqrt{2} dx$  болот, ал эми  $0 \leq x \leq 1$  аралыгында өзгөрөт. Бул маанилерди (7) формуласына коюп,

$$\int_{AB} (x + y)dl = \int_0^1 (x + 1 - x) \sqrt{2} dx = \sqrt{2} \text{ табабыз.}$$

в) BO жагы  $x = 0$  теңдемеси менен берилип,  $0 \leq y \leq 1$  аралыгында өзгөрөт. Анда

$$\int_{BO} (x + y)dl = \int_0^1 (0 + y)dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{ келип чыгып,}$$

$$\int_L (x + y)dl = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

жообуна ээ болобуз. ◀

**Мейкиндик ийрилеринен алынган I –түрдөгү ийри сызыктуу интегралдар**

Жогоруда  $R^2$  мейкиндигинде жайгашкан квадратталуучу  $D$  жалпак

фигурасында кармалып турган АВ ийриси боюнча,  $f(x, y)$  функциясынан алынган I – роддогу ийри сызыктуу интегралды карадык. Эгерде АВ ийриси  $R^3$  мейкиндигинде жайгашса, ийрини кайсы бир кубдаштырылуучу  $\Omega$  телосунда кармалып турат деп эсептейбиз.

$$\text{Эгерде АВ ийриси} \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad \text{параметрдик}$$

теңдемелери менен берилсе, анда бул ийринин чекиттери боюнча  $f(x, y, z)$  функциясынан алынган I – роддогу ийри сызыктуу интеграл, (6) формуласын

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2} dt$$

көрүнүшкө кеңейтүү менен эсептелет.

## § 16.2 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдар

### 16.2.1 II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын аныктамасы

I – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл АВ ийрисинде берилген функциядан, ийринин өзүндө жаткан чекиттер боюнча алынса, II – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл ийриде жаткан чекиттердин координаттык октордогу проекциялары боюнча алынат.

Айталы,  $xOy$  координаттык тегиздигинде жылмакай же бөлүкчө – жылмакай АВ ийриси берилип, координаттык тегиздиктеги кайсы бир квадратталуучу  $D$  жалпак областында кармалып турсун, ал эми

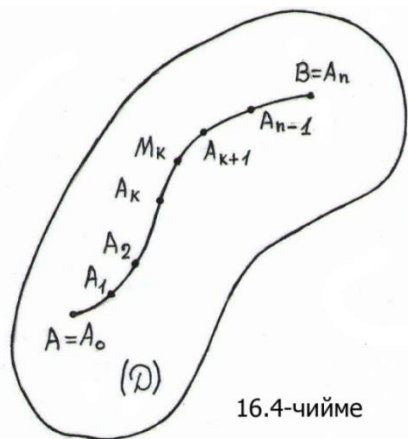
$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$  вектор – функциясы  $D$  областында аныкталган болсун. АВ ийрисин  $A = A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, A_n = B$  чекиттерин жардамы менен, эркин ыкмада  $n$  сандагы бөлүкчө – жаачаларга бөлөлү. Бөлүү чекиттерин координаталары тиешелүү түрдө

$(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$  болушсун (16.4 – чийме). Ар бир  $\overline{A_k A_{k+1}}$  бөлүкчө – жаачалардан каалагандай бир  $M_k(\xi_k; \eta_k)$  чекитин алып, берилген вектор – функция үчүн

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (8)$$

интегралдык сумма түзөлү. Мында  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  саны  $\overline{A_k A_{k+1}}$  жаачасын  $Ox$  огундагы, ал эми  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$  саны  $Oy$  огундагы проекциялары ( $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Айталы  $\overline{A_k A_{k+1}}$  бөлүкчө – жаачаларын жааларынын эң узуну  $\Delta l$  болсун.



16.4-чийме

**16.2 Аныктама.** Эгерде  $AB$  ийриси кандай ыкма менен  $n$  сандагы бөлүкчөлөргө бөлгөнүбүзгө жана  $M_k$  чекиттерин эркин тандаганыбызга көз каранды болбостон, (8) суммасын  $\Delta l \rightarrow 0$  умтулгандагы чектүү предели жашаса, анда пределин маанисин  $\vec{F}(M)$  вектор – функциясынан  $AB$  ийриси боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү (роддогу) ийри

сызыктуу интеграл деп атап,

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (9)$$

символу менен белгилейбиз.

Ошентип, 16.1 аныктамасына ылайык  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (10)$$

көрүнүштө түзүлөт.



(10) теңдештигин оң жагындагы предел чектүү мааниге ээ болушу үчүн  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  функцияларынын ийринин чекиттеринде чектелген болушу керек экендигин байкайбыз. Бул шартты теорема көрүнүштө берели.

**16.2 Теорема.** Эгерде  $AB$  ийрисин толугу менен кармап турган кандайдыр бир  $D$  жалпак областында  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  функциялары үзгүлтүксүз болушса, анда  $\Pi$  – түрдөгү (9) ийри сызыктуу интегралы жашайт.

$AB$  ийрисине таандык  $M(x; y)$  чекитин радиус – векторун

$\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j}$  десек,  $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$  болгондуктан

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  туюнтмасы:  $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$  вектору менен  $\vec{r}$  векторун скалярдык көбөйтүндүсүн координаталар боюнча жазылышы болорун байкайбыз. Анда  $\vec{F}$  жана  $d\vec{r}$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсүн жардамы менен,  $\Pi$  – түрдөгү (9) ийри сызыктуу интегралын

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) \quad (11)$$

көрүнүштө жазууга болот.

### 16.2.2 $\Pi$ – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды эсептөө

Айталы,  $AB$  ийриси  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t_0 \leq t \leq t_1$  параметрдик

теңдемеси менен берилип, берилген аралыкта  $\varphi(t)$  жана  $\psi(t)$  биринчи тартиптеги  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Ал эми  $A$  чекитинен  $B$  чекитине карай ийри бойлой өзгөргөн  $M(x; y)$  чекитин кыймылына,  $t$  параметрин  $t_0$  дөн башталып  $t_1$  ге карай өзгөргөн кыймылы туура келсин.

Эгерде  $AB$  ийрисин толугу менен кармап турган квадратталуучу  $D$  жалпак областында  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда  $dx = \varphi'(t)dt$ ,  $dy = \psi'(t)dt$  болгондуктан,

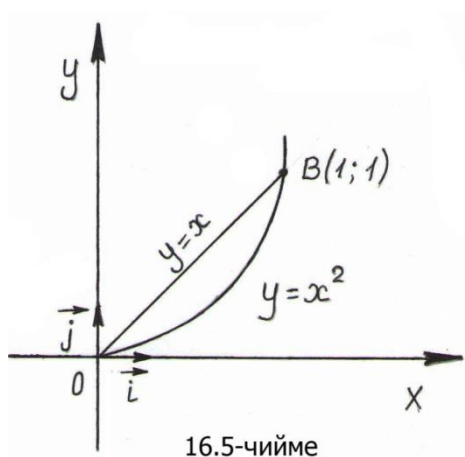
$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралын

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)] dt \end{aligned} \quad (12)$$

эрежеси менен эсептей алабыз.

Мисал. 3)  $\int_{AB} x dy - y dx$  ийри сызыктуу интегралын



а)  $A(0; 0)$  жана  $B(1; 1)$  чекиттерин туташтырган кесинди боюнча,

б) Ошол эле чекиттерди туташтырган  $y = x^2$  параболасын жаасы боюнча

эсептегиле (16.5 – чийме).

► а)  $x$  өзгөрүлмөсүн параметр катарында кабыл алып,  $AB$  кесиндисин теңдемесин  $y = x, 0 \leq x \leq 1$  көрүнүштө жазып,  $dy = dx$  табабыз. Анда (12) формуласын

колдонсок,

$$\int_{AB} x dy - y dx = \int_0^1 (x dx - x dx) = 0 \text{ келип чыгат.}$$

б)  $AB$  ийрисин теңдемеси  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$  болот. Мындан  $dy = 2x dx$  болгондуктан  $x dy = 2x^2 dx$  болуп, (12) формуласынан

$$\int_{AB} x dy - y dx = \int_0^1 (2x^2 dx - x^2 dx) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

жообуна ээ болобуз. ◀

Мисалдан көрүнгөндөй  $I$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдан айырмаланып,  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл, интегралдоо багытынан көз каранды болот, анткени интегралдоо багыты өзгөргөндө ийринин бөлүкчө – жаачаларын узундуктары өзгөрбөй кала бергени менен, алардын координаттык октордогу  $\Delta x_k, \Delta y_k$  проекцияларын башталуу учтары өзгөрүп, белгилери алмашат, ошондуктан (8) интегралдык суммасы да белгисин өзгөртөт.

### 16.2.3 $\Pi$ – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын касиеттери

Жазуу ыңгайлуулугун эске алып,  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды  $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$  жана  $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү болгон (11) көрүнүштө жазып, анын касиеттерине токтолуп өтөлү.

#### 1<sup>0</sup>. Сызыктуулук.

Эгерде  $\int_{AB} (\vec{F}_1, d\vec{r})$  жана  $\int_{AB} (\vec{F}_2, d\vec{r})$  ийри сызыктуу интегралдары

жашашса, анда  $\forall \alpha, \beta \in R$ :

$\int_{AB} (\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2, d\vec{r})$  интегралы да жашап,

$$\int_{AB} (\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2, d\vec{r}) = \alpha \int_{AB} (\vec{F}_1, d\vec{r}) + \beta \int_{AB} (\vec{F}_2, d\vec{r})$$

теңдештиги орун алат.

**2<sup>0</sup>. Аддитивдүүлүк.** Эгерде АВ ийриси эки АС жана СВ ийрилери бөлүнсө, анда

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) \text{ интегралын жашашынан } \int_{AC} (\vec{F}, d\vec{r}), \int_{BC} (\vec{F}, d\vec{r})$$

интегралдарын да жашашы келип чыгып, төмөндөгү эреже

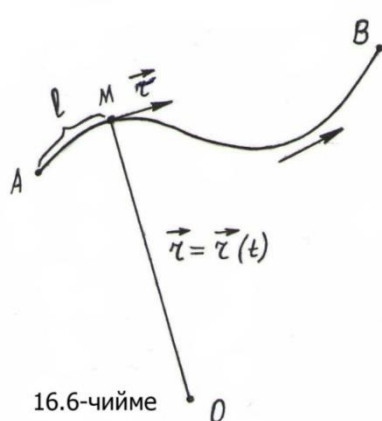
$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{AC} (\vec{F}, d\vec{r}) + \int_{CB} (\vec{F}, d\vec{r})$$

аткарылат.

**3<sup>0</sup>.** АВ ийриси боюнча алынган II – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл, интегралдоо багыттарын алмаштырганда белгисин өзгөртөт

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = - \int_{BA} (\vec{F}, d\vec{r}).$$

**4<sup>0</sup>. I жана II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдардын байланыштары.**



Айталы,  $\vec{r} = \vec{r}(l)$  вектордук теңдемеси менен берилген, багыты белгилүү, б.а. А чекитинен башталып, В чекитинде бүткөн АВ ийриси боюнча II – түрдөгү ийри сызыктуу

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{AB} P(M)dx + Q(M)dy$$

интеграл алынсын. Мында  $l$  – параметри деп, тандалган багыт боюнча А чекитинен башталып, ийриде каралып жаткан  $M(x; y) \equiv M(l)$  өзгөрүлмө чекитине чейинки ийринин жаасын узундугун белгилейбиз (16.6 – чийме). Анда  $M$  чекитинде  $\vec{r}$  векторунан  $l$  жаасы боюнча алынган туунду, ийриге  $M$  чекитинен жүргүзүлгөн жаныманын (ийринин узаруу багытына карай)  $\vec{t} = \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$  бирдик векторуна барабар (мында  $\alpha$ ,  $Ox$  менен жаныманын арасындагы бурч), же

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl}$  же  $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dl$ . Демек,  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{AB} (\vec{F}, \vec{\tau} \cdot dl) = \int_{AB} (\vec{F}, \vec{\tau}) \cdot dl$$

көрүнүштөгү  $I$  – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл катарында жазууга болот. Эгерде  $AB$  ийриси узундугу  $L$  болуп,  $l$  – параметрине карата  $\begin{cases} x = \varphi(l), \\ y = \psi(l), \end{cases} 0 \leq l \leq L$  теңдемеси менен берилсе, анда туундунун геометриялык маанисинен келип чыккан  $\cos \alpha = \varphi'(l)$ ,  $\sin \alpha = \psi'(l)$  теңдештиктерин эске алып, ийри сызыктуу интегралдардын вектордук байланыш формуласын

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) &= \int_{AB} (\vec{F}, \vec{\tau}) \cdot dl = \int_{AB} [P(M) \cos \alpha + Q(M) \sin \alpha] dl = \\ &= \int_{AB} [P(M) \varphi'(l) + Q(M) \psi'(l)] dl = \int_{AB} [P(x, y) \varphi'(l) + Q(x, y) \psi'(l)] dl \end{aligned}$$

скалярдык көрүнүштө жазууга болот.

#### 16.2.4 Гриндин формуласы

Эгерде туюк формадагы  $AB = L$  ийриси  $D$  жалпак областын курчап турган чек ара сызыгы болсо, анда белгилүү бир шарттар аткарылганда,  $D$  жалпак областы боюнча алынган кош интеграл менен,  $AB = L$  ийриси боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын арасында байланышты орнотууга болот.

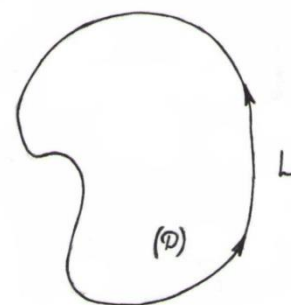
**16.3 Теорема.** *Эгерде бөлүкчө – жылмакай, туюк формадагы  $L$  ийриси менен чектелген, квадратталуучу туюк  $D$  областында  $P(x, y)$  жана  $Q(x, y)$  функциялары берилип,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда*

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

Гриндин формуласы деп аталган (13) теңдештиги орун алат.

Мында  $\oint_L$  символу,  $D$  областын чек ара сызыгы болгон  $L$  туюк

ийрисинен оң багыт боюнча интеграл алынарын түшүндүрөт ( $L$  ийрисин бойлоп жүргөндө  $D$  областы дайыма сол жакта калса, оң багыт болот). Жалпак  $D$  областы (16.7 – чийме) же бир байламталуу, б.а. каалагандай эки чекиттерин областка таандык чекиттерден куралган үзүксүз сызыктар менен туташтырууга болгондой, же  $L$  чек ара сызыгы бир канча жөнөкөй туюк ийрилерден турган көп байламталуу область болушу мүмкүн (16.8 – чиймеде үч байламталуу). Далилдөөнү бир байламталуу  $D$  областы үчүн жүргүзөлү.

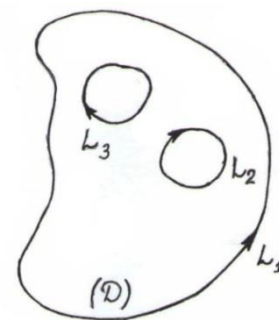


16.7-чийме

► Ийри сызыктуу жана кош интегралдардын сызыктуулук касиетин пайдаланып, Гриндин (13) формуласын төмөндөгү көрүнүштөргө

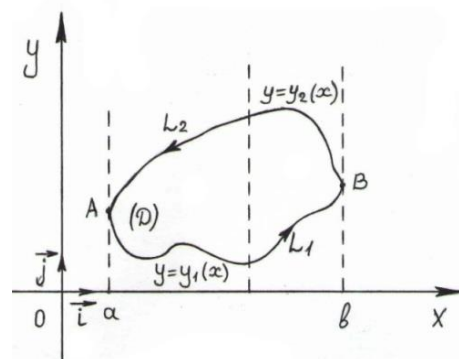
$$\oint_L P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad (14)$$

$$\oint_L Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (15)$$



16.8-чийме

ажыратып жазып, теореманын далилдөөсүн (14), (15) теңдештиктерди далилдөө менен алмаштырууга болот.  $D$  областын бир байламталуу деп эсептеп, оболу (14) теңдештигинин аткарыларын далилдейли. Айталы  $L$  чек ара сызыгын,  $Oy$  огуна параллель каалагандай түз, экиден ашык эмес чектиттерде гана кесип кесип өтсүн, болбосо түздүн кайсы бир кесиндиси  $L$  ийрисин бөлүкчө – жаачасы менен дал келсин.



16.9-чийме

Мындай шарттарда,  $L$  ийрисин  $Ox$  огуна жайгашкан  $[a, b]$  кесиндисине бир маанилүү проекциялануучу, эки  $L_1$  – төмөнкү жана  $L_2$  – жогорку бөлүктөргө бөлүүгө болот (16.9 – чийме). Ийри сызктуу интегралдын аддитивдүүлүк касиети боюнча (14) теңдештигин сол жагын  $L_1, L_2$  ийрилери боюнча интегралдардын

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx$$

суммасына ажыратып, ийрилердин теңдемелерин  $[a, b]$  кесиндисинде  $x$  өзгөрүлмөсүнө (параметрине) карата бир маанилүү аныкталышкан

$$\begin{cases} L_1: y = y_1(x), \\ L_2: y = y_2(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b \quad \text{функциялары көрүнүштөрдө жазып,}$$

акыркы ийри сызктуу интегралды

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx = - \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx, \end{aligned} \quad (16)$$

көрүнүштөгү анык интегралга келтирүүгө болот.

Теореманын шарты боюнча  $D$  областында  $\frac{\partial P}{\partial y}$  функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, анын  $y$  өзгөрүлмөсү боюнча өсүндүсүн

$$P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \quad (17)$$

көрүнүштө жазууга болот. Анда (16) менен (17) лерди салыштырып,

$$\oint_L P(x, y) dx = - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

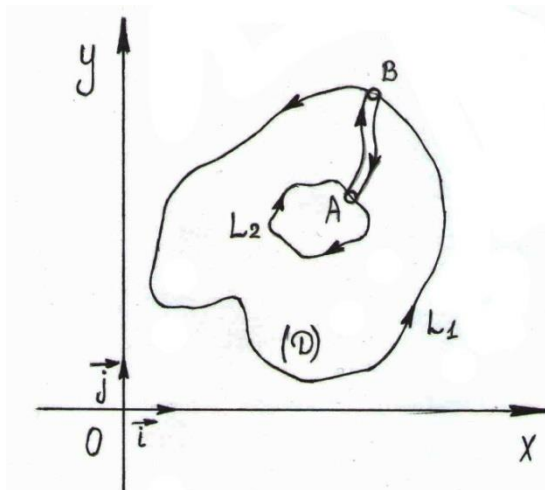
теңдештигине ээ болуп, анын оң жагында турган кайталануучу интегралдын  $D$  областы боюнча,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  функциясынан алынган кош интеграл экендигине ишенебиз. Демек, далилдөөнү талап кылган

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

(14) теңдештиги туура болот.

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүү менен (15) теңдештигин да туура экендигин көрсөтүп, (14) менен (15) экөөсүн мүчөлөп кошкондон кийин, бир байламталуу область үчүн Гриндин формуласын толугу менен далилдейбиз. ◀

Гриндин формуласын бир канча байламталуу  $D$  областын  $L$  контуру (чек ара сызыгы) үчүн да далилдөөгө болот. Мисалы эки байламталуу  $D$  областын чек ара сызыктары эки: сырткы  $L_1$ , ички  $L_2$  туюк ийрилерден турсун (16.10 – чийме).  $D$  областында  $AB$  кесүү



16.10-чийме

тилкесин жүргүзүү менен чек ара сызыктарын байланыштырган кесүү сызыгын бойлогон жасалма жол куруп, бир байламталуу областка айландырабыз. Натыйжада  $D$  областын чек ара сызыктарын оң багытты сактоо менен туюк бир

$L = L_1 + BA + L_2 + AB$  чек ара сызыгына өзгөртүп түзөбүз. Андай



болсо, бир байламталуу область боюнча Гриндин формуласы аткарылып, ал

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{L_1+BA+L_2+AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

көрүнүштө жазылат. Анын сол жагын аддитивдүүлүк касиети боюнча

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{L_1+BA+L_2+AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \oint_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy +$$

$$+ \oint_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \oint_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \oint_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

өзгөртүп жазууга болот. Анткени АВ жана ВА ийрилери боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдар белгилери боюнча гана айырмаланышып (карама – каршы), тең болушкандыктан жоюшуп кетишет. Мында  $D$  областы ар дайым сол жакта кала тургандай оң багыт,  $L_1$  ийриси боюнча саат стрелкасына каршы багыт болсо,  $L_2$  ийриси боюнча саат стрелкасын багыты менен дал келет.

Гриндин формуласын пайдаланып,  $L$  контуру менен чектелген,  $D$  жалпак областын  $S$  аянтын эсептөөчү формуланы келтирип чыгара алабыз. Ал үчүн

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x \quad \text{деп алсак, анда} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

болгондуктан, Гриндин формуласынан

$$\oint_L -y dx + x dy = 2 \iint_D dx dy \equiv 2 \cdot S \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy \quad (18)$$

аянттын формуласы келип чыгат.

**Эскертүү.** Мындан ары атайын эскертүүсүз  $D$  областын бир байламталуу деп эсептейбиз, анткени көп байламталуу областтарды 16 – чиймеде көрсөтүлгөн  $AB$  сыяктуу кесүүлөрдүн жардамы менен, бир байламталуу областтарга өзгөртүп түзүүгө болот.

Мисал. 4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  эллипс менен чектелген  $D$  областын аянттын эсептегиле.

►  $L$  туюк ийриси эллипстин контуру болуп, аны

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

көрүнүштөгү параметрдик теңдеме менен да берүүгө болот. Чынында эле, теңдемеден  $t$  параметри 0 дөн баштап,  $2\pi$  ге чейин өсүү тартибинде өзгөрүп барса, эллипстин  $M(x; y)$  чекиттери оң багыт боюнча эллипс бойлоп өзгөрүп барарын текшерүүгө болот.

Изделүүчү аянт (18) формуласы менен эсептелгендиктен,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \sin t d(a \cos t) + a \cos t d(b \sin t) = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

жообуна ээ болобуз.

**Эскертүү.**  $R^3$  мейкиндигинде белгилүү багытты көздөгөн бөлүкчө – жылмакай  $AB$  ийриси жайгашып, ийрини толугу менен өзүнө кармап турган кубдаштырылуучу  $\Omega$  телосунда үзгүлтүксүз болгон

$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$  вектор – функциясы берилсе, анда жалпак область сыяктуу эле, багыты менен берилген  $AB$  ийриси боюнча  $\vec{F}(M)$  функциясынан төмөндөгүдөй көрүнүштө

$$\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

$\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу (мейкиндиктеги) интеграл алууга болот. Мында  $M(x; y; z)$  чекити  $AB$  ийрисине гана таандык деп эсептелет.

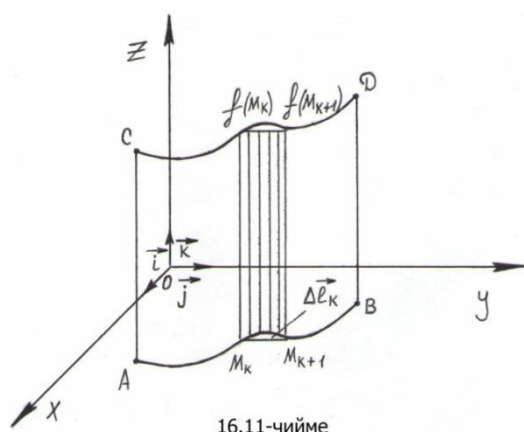
## § 16.3 Ийри сызыктуу интегралдардын колдонулуштары

### 16.3.1 Ийринин массасы

16.1.1 темадагы (\*) формуласын келтирип чыгаруу жолунда, материалдык  $L = AB$  ийрисин  $m$  массасы,  $I$  – түрдөгү

$$m = \int_{AB} f(M)dl \quad (19)$$

ийри сызыктуу интегралы менен эсептелери көрсөтүлгөн. Мында  $f(M)$  функциясы  $L$  ийрисин  $M$  чекиттеринде үзгүлтүксүз болуп, материалдык ийринин  $M$  чекиттериндеги сызыктуу өзгөрүлмө тыгыздыкты көрсөтөт.



### 16.3.2 Цилиндрдик беттин аянты

Айталы,  $xOy$  координаттык тегиздигинде түздөлүүчү (б.а. узундугун эсептөөгө мүмкүн болгон)  $AB$  ийрисинде аныкталган жана үзгүлтүксүз,

$f(M) = f(x, y) \geq 0$  оң функциясы берилсин. Анда Охуз

координаттык мейкиндигинде  $(x; y; f(x, y)) = (M; f(M))$  чекиттери, түзүүчүлөрү  $Oz$  аппликатына параллель түздөр, багытточусу  $AB$  ийриси болгон цилиндрдик бетте жайгашкан кандайдыр бир ийрини

сызат. Натыйжада, Охуз тин 1 – квадрантында ( себеби  $f(M) \geq 0$  ) төмөн жагынан АВ ийриси (себеби  $M(x; y) \in AB$  ), жогору жагынан  $z = f(x, y)$  ийриси, түзүүчүлөрү бул эки ийрилери туташтырган АС, ВD сыяктуу вертикалдык түздөр болгон ABCD цилиндрдик бети түзүлөт (16. 11 – чийме).

ABCD цилиндрдик беттин аянтын табуу үчүн төмөндөгүдөй иш – аракеттерди жүргүзөлү:

1)  $A = M_0, M_2, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$  чекиттерин жардамы менен, АВ ийриси 16.11 – чиймеде көрсөтүлгөндөй  $n$  сандагы бөлүкчө – жаачаларга бөлөлү.

2) Ар бир  $M_k$  чекиттеринен  $xOy$  тегиздигине бийиктиги  $f(M_k)$  болгон перпендикулярларды тургузуу менен, ABCD цилиндрдик бетин  $n$  сандагы тилкечелерге бөлөлү.

3) Сезилбес каталык кетирүү менен ар бир тилкечени, негизи  $M_k \overline{M_{k+1}}$  жаачасын узундугуна барабар  $\Delta l_k$  саны болгон, ал эми бийиктиги жаачанын каалагандай бир чекитиндеги  $f(M)$  функциясын мааниси болгон (маселен  $f(M_k)$ ) тик бурчтук менен алмаштыралы.

Анда  $k$  – тилкеченин аянты жакындаштырылган түрдө, тик бурчтуктун негизин бийиктигине көбөйтүү менен  $f(M_k) \cdot \Delta l_k$  көрүнүштө эсептөөгө болот. Ал эми жалпы ABCD цилиндрдик бетин аянтын,  $n$  сандагы тилкече тик бурчтуктардын аянттарын суммасы

катарында  $S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \cdot \Delta l_k$  жакындаштырып эсептей алабыз.

Жакындаштыруу тактыгын азайтуу үчүн бөлүүлөрдүн  $n$  санын чексиз көбөйтүү, же  $\Delta l_k$  бөлүкчө – жаачаларын эң узуну деп алынган  $\Delta l$  санын чексиз кичинертүү зарыл экендигин байкайбыз.

Ошентип ABCD цилиндрдик бетин катасыз аянты,

$$S = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \cdot \Delta l_k$$

пределин маанисине тең болот. Теңдештиктин оң жагында  $f(M)$  функциясынан АВ ийриси боюнча алынган I – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл тургандыктан, ABCD цилиндрдик бетин катасыз аянтын

$$S = \int_{AB} f(M) dl \quad (20)$$

I – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл менен туюнтууга болот.

Мисал. 5)  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) цилиндрин жогору жагынан  $x \cdot y = 2R \cdot z$  бети менен кескенден кийин, пайда болгон бөлүгүнүн каптал бетин аянтын эсептегиле.

►  $xOy$  тегиздигиндеги АВ ийриси деп  $x^2 + y^2 = R^2$  айланасын 1 – чейрегин алабыз, анын контур сызыгындагы чекиттерде аныкталган функция катары  $z = \frac{x \cdot y}{2R}$  функциясын алууга болот. Анда төмөн жагынан  $x^2 + y^2 = R^2$  айланасы (ийри), жогору жагынан  $z = \frac{x \cdot y}{2R}$  бети менен цилиндрдик беттин кесилиш ийриси, каптал жагынан түзүүчүлөрү ушул ийрилерди туташтыруучу Oz огуна параллель кесиндилер болгон цилиндрдик бет пайда болуп, анын аянты (20) формуласы боюнча

$$S = \int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} \frac{x \cdot y}{2R} dl \quad \text{эсептелет.}$$

АВ айланасыны (ийрисин) 1 – чейректеги скалярдык теңдемесин

$x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  параметрдик теңдеме менен алмаштырсак, анда жаанын дифференциалы

$$dl = \sqrt{[(R \cos t)'_t]^2 + [(R \sin t)'_t]^2} dt = R \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = R dt$$

болгондуктан, акыркы интегралды

$$S = \int_{AB} \frac{x \cdot y}{2R} dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos t \cdot R \sin t}{2R} R dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{4} \text{ көрүнүштө эсептеп, изделүүчү аянтты табабыз. } \blacktriangleleft$$

### Жалпак фигуранын аянты

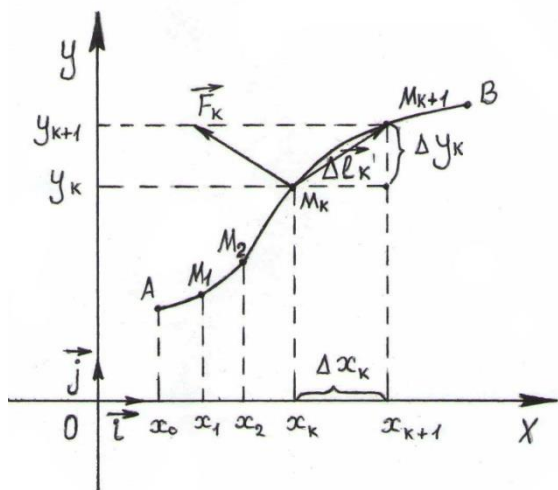
L туюк ийриси менен чектелип турган, аянты S болгон D жалпак фигурасын аянттын, (18) формуласына ылайык

$$S = \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy,$$

II – түрдөгү ийри сызыктуу интеграл менен эсептөөгө болот.

### 16.3.3 Күчтүн жумушу

Айталы, АВ ийрисин толугу менен кармап турган кандайдыр бир D жалпак областында  $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$  вектор – функциясы менен мүнөздөлгөн өзгөрүлмө күч берилсин. Мында



16.12-чйме

$P(M) = P(x, y)$  ,  $Q(M) = Q(x, y)$  функциялары, ошондой эле  $\vec{F}(M)$  вектор – функциясы  $M(x; y)$  чекитинде үзгүлтүксүз деп эсептелишет.

Кандайдыр бир бирдик массага ээ болгон M материалдык чекити,  $\vec{F}$  өзгөрүлмө күчүн таасири менен АВ ийриси боюнча А чекитинен В чекитине которулсун,  $\vec{F}$  өзгөрүлмө күчүн аткарган жумушун табуу

маселесин карайлы.

Бул маселени чыгаруу үчүн, АВ ийрисин

$A = M_0, M_2, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$  чекиттерин жардамы менен  $n$  сандагы бөлүкчө – жаачаларга бөлөбүз (16.12 – чийме). Ар бир  $M_k \overline{M_{k+1}}$  бөлүкчө – жаачаны,  $\overline{M_k M_{k+1}} = \overline{\Delta l_k} = \{\Delta x_k; \Delta y_k\}$  координаталуу хорда – вектор менен алмаштырып, бөлүүлөрдүн саны жетишерлик чоң болгондо, бул майда жаача менен хорданын экөөсүндө тең  $\vec{F}$  күчү өзгөрбөстөн, жакындаштырылган  $\vec{F}_k$  – турактуу санына тең деп ойлойлу. Анда жаачанын каалагандай  $M_k(x_k; y_k)$  чекитиндеги күчтү  $\vec{F}_k = \vec{F}(M_k)$  көрүнүштө белгилеп, бул бөлүкчөдөгү  $\vec{F}_k$  күчүн  $W_k$  – жумушун жакындаштырып,  $\vec{F}_k$  жана  $\overline{\Delta l_k}$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү катарында

$$W_k \approx (\vec{F}_k, \overline{\Delta l_k}) = |\vec{F}_k| \cdot |\overline{\Delta l_k}| \cos \widehat{\vec{F}_k, \overline{\Delta l_k}} \quad (21)$$

эсептөөгө болот. Мындан  $|\vec{F}_k|, |\overline{\Delta l_k}|$  – тиешелүү векторлордун узундуктары. (21) скалярдык көбөйтүүнү векторлордун

$\vec{F}_k = \vec{F}(M_k) = P(x_k, y_k)\vec{i} + Q(x_k, y_k)\vec{j}$  ,  $\overline{\Delta l_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$  координаталары аркылуу туюнтуп, жаачадагы жумушту

$$W_k \approx P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

көрүнүштө кайра жазалы. Анда  $\vec{F}(M)$  күчүн материалдык  $M$  чекитин  $AB$  ийриси боюнча которууда аткарган жумушун жакындаштырып

$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k, \quad (22)$$

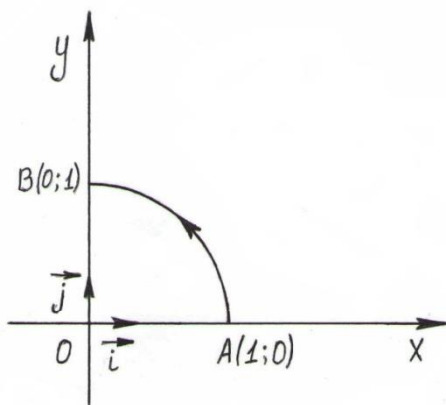
ар бир жаачалардагы жумуштардын суммасы катарында эсептөөгө болот. Жакындаштыруу тактыгы, бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтүү же

$|\overline{\Delta l_k}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_k \rightarrow 0, \\ \Delta y_k \rightarrow 0 \end{cases}$  умтулгандагы пределге өтүү менен гана

жогорулайт. Пределге өтсөк, (22) теңдештикгин оң жагы  $AB$  ийриси боюнча  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  вектор – функциясынан алынган  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралды бергендиктен, катасыз жумушту

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (23)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот.



16.13-чийме

Мисал. б) Бирдик массага ээ болгон материалдык чекит,  $\vec{F} = x^2\vec{j}$  күчүн таасири астында

$y^2 = 1 - x$  параболасын бойлоп

A(1; 0) чекитинен B(0; 1) чекитине которулса, анда  $\vec{F}$  күчүн аткарган жумушун эсептегиле (16.13 – чийме).

►  $\vec{F}$  күчү  $P(x, y) = 0$ ,  $Q(x, y) = x^2$

түзүүчүлөрүнөн тургандыктан, АВ ийрисин теңдемесин

$x = 1 - y^2$ ,  $0 \leq y \leq 1$  көрүнүштө жазып, (23) формуласын пайдалансак, изделүүчү жумуш

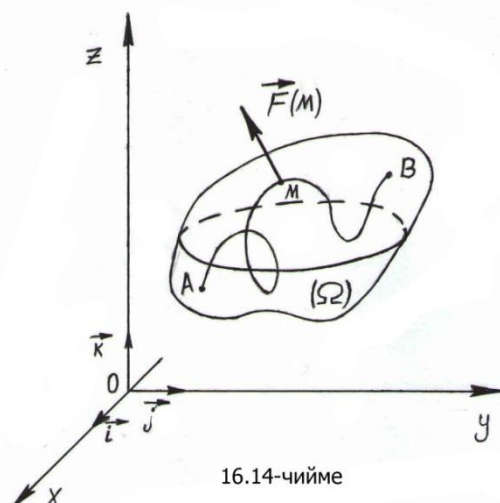
$$W = \int_{AB} x^2 dy = \int_0^1 (1 - y^2)^2 dy = \int_0^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy =$$

$$= \left( y - 2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{5}$$

көрүнүштө табылат. ◀

(23) формуласын мейкиндик ийрилери үчүн да жалпылоого болот (16.14 – чийме).

Эгерде  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан АВ ийрисин толугу менен кармап турган кандайдыр бир  $\Omega$  тело – областында



16.14-чийме



$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$  күчү берилип,  $P(M), Q(M), R(M)$  функциялары  $\Omega$  областында үзгүлтүксүз болушса, анда мейкиндиктеги бирдик массага ээ болгон  $M$  материалдык чекитин,  $AB$  ийрисин бойлоп  $A$  чекитинен  $B$  чекитине чейин которууга жумшалган  $\vec{F}$  күчүн жумушу,

$$W = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

формуласы менен эсептелет.

## § 16.4 Интегралдоо жолунан көз каранды болбогон ийри сызыктуу интегралдар

### 16.4.1 Интегралдоо жолунан көз каранды эместиктин шарттары

Айталы, бир байламталуу  $D \subset R^2$  областында үзгүлтүксүз болгон  $P(x, y), Q(x, y)$  функциялары берилип,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (24)$$

туюнтамасы кандайдыр бир  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болсун. Андай болсо  $F(x, y)$  функциясы  $D$  областында  $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$  жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функция болуп,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (25)$$

теңдештиги орун алат.

$D$  областынан каалагандай эки  $A$  жана  $B$  чекиттерин тандап алып, аларды туташтырып, толугу менен  $D$  областында кармалып турган эркин формадагы  $AB$  ийрисин сызалы.  $AB$  ийриси боюнча алынган

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (26)$$

ийри сызыктуу интегралдын, эркин сызылган ийрилердин формаларынан көз каранды болбостон, алардын  $A$  – башталуу жана  $B$  – бүтүү чекиттерин жайгашуу абалдарынан гана көз каранды болгон учурларды көрсөтөлү.

**16.4 Теорема.** (26) ийри сызыктуу интегралын, интегралдоо жолунун формасынан көз каранды болбой, анын башталуу жана бүтүү чекиттерин абалдарынан гана көз каранды болушу үчүн, каралган  $D$  областында (24) дифференциалдык туюнтмасын кандайдыр бир, бир маанилүү  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болушу зарыл жана жетиштүү.

**Зарылдыгы.** ► Айталы (26) ийри сызыктуу интегралы, интегралдоо жолунан көз каранды болбосун, анда (24) дифференциалдык туюнтмасын кандайдыр бир, бир маанилүү  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болорун көрсөтөлү.

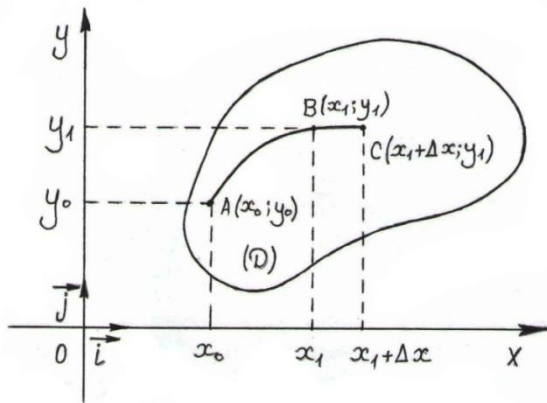
Бул учурда (26) интегралын мааниси  $A(x_0; y_0)$  – башталуу жана  $B(x_1; y_1)$  – бүтүү чекиттерин берилиши менен бир маанилүү аныкталууга тийиш, б.а.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy . \quad (27)$$

Бул жерде интеграл алынуучу ийринин түзүлүшү жөнүндө маалымат берилбей, болгону анын башталуу жана бүтүү чекиттери жөнүндөгү маалыматтар гана бар экендигин белгилей кетели.

Эгерде  $A(x_0; y_0)$  чекитин кыймылын токтотуп (фиксирлеп), жогорку предел болгон  $B$  чекитин  $D$  областы боюнча эркин кыймылдоочу  $M(x; y)$  координаталуу чекит деп ойлосо, анда (27) ийри сызыктуу интегралын маанисин,  $D$  областында аныкталган кандайдыр бир эки өзгөрүлмөлүү

$$F(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$



16.15-чийме

функция катарында кароого болот. Анын жекче туундуларын табуу үчүн, оболу  $D$  областынан эркин тандалган  $B(x_1; y_1)$  чекитин алып,  $x_1$  абциссасына жетишерлик кичине  $\Delta x$  өсүндүсүн берүү менен, аны ушул эле областтан чыгып кетпеген  $C(x_1 + \Delta x; y_1)$  чекитине козгойлу (16.15 – чийме). Анда  $A$  чекитинен башталып,  $B$  чекитинде бүткөн бардык  $L$  ийрилери боюнча

алынган ийри сызыктуу интегралды

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ көрүнүштө, ал эми } B$$

чекитинен  $C$  чекитине чейинки  $Ox$  огуна параллель  $BC$  кесиндиси боюнча алынган интегралды

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1 + \Delta x; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

көрүнүштөрдө жазып,  $F(x, y)$  функциясын  $B$  чекитиндеги өсүндүсүн

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) &= \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1 + \Delta x; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \\ &- \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1; y_1)}^{(x_1 + \Delta x; y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{BC} P(x, y)dx + 0 = \int_{BC} P(x, y)dx \end{aligned}$$

табабыз. Мында  $BC$  кесиндиси  $Oy$  огуна перпендикуляр болуп, проекциясы бир эле чекит болгондуктан,  $Q(x, y)dy$  ти кармап турган интеграл нөлгө айланат. Ал эми акыркы калган интегралда  $BC$

кесиндисин теңдемеси  $y = y_1$  болгондуктан, аны интегралга коюп,  $F(x, y)$  функциясын өсүндүсүн

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (R) \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1) dx,$$

бир өзгөрүлмөлүү функциядан алынуучу кадимки Римандын маанисиндеги анык интеграл менен туюнта алабыз.  $P(x, y_1)$  функциясы  $D$  областында кармалган  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  аралыгында үзгүлтүксүз болгондуктан, орточо маани жөнүндөгү теорема боюнча ушул аралыктан  $x_1 + \theta \Delta x$ , ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) чекити табылып,

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1) dx = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \Delta x$$

теңдештиги аткарылат. Анда өсүндүнү

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \Delta x \text{ же}$$

$\frac{F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1)$  теңдештиги катарында жазууга болот. Мындан  $\Delta x \rightarrow 0$  умтулгандагы пределге өтсөк, теңдештиктин эки тарабында тең үзгүлтүксүз функциялар тургандыктан, пределдин мааниси  $F(x, y)$  функциясын  $B(x_1; y_1)$  чекитиндеги  $x$  өзгөрүлмөсү боюнча жекече

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1) \text{ туундусу болору келип чыгат.}$$

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп,  $\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1)$  барабардыгына ээ болобуз.  $B(x_1; y_1)$  чекитин  $D$  областынан эркин тандалып, анын ар бир чекити болуп калышы мүмкүн экендигин эске алып,  $D$  областын бардык  $(x; y)$  чекиттеринде

$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$  теңдештиктери орун алат деген бүтүмгө келебиз. Мындан  $F(x, y)$  функциясын  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  функцияларына тең болгон бир маанилүү үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болору келип чыгып, ийри сызыктуу интегралдын алдындагы туюнтма  $F(x, y)$  функциясына

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

толук дифференциал экендигин далилдейбиз. ◀

**Жетиштүүлүгү.** ▶ Айталы, (24) туюнтмасы кандайдыр бир, бир манилүү  $F(x, y)$  функциясын толук дифференциалы болуп,  $D$  областында

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \quad (28)$$

үзгүлтүксүз жекече туундулары жашап, (25) теңдештиги орун алсын. (26) ийри сызыктуу интегралын, интегралдоо жолунун формасынан көз каранды болбой, ийринин учтарындагы чекиттердин абалынан гана көз каранды болорун көрсөтөлү.

$D$  областынан эркин тандап  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  координаталары менен берилген чекиттерди алып, аларды кандайдыр бир бөлүкчө – жылмакай  $L$  ийриси менен туташтыралы. Ийри бөлүкчө –жылмакай болгондуктан, кандайдыр бир  $t$  параметрине карата анын  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$ , көрүнүштөгү бир маанилүү параметрдик теңдемесин түзүүгө болот.  $t$  параметри  $\alpha$  дан  $\beta$  га карай өзгөргөндө, ийри  $A$  чекитинен  $B$  чекитине карай сызылып жөнөсүн деген багытты алалы. Анда ийринин учку чекиттеринде

$x_A = \varphi(\alpha), y_A = \psi(\alpha); x_B = \varphi(\beta), y_B = \psi(\beta)$  барабардыктары орун алып, (26) ийри сызыктуу интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt$$

көрүнүштөгү анык интегралга келтирилет. (28) теңдештиктерин

$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = P(\varphi(t), \psi(t)), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = Q(\varphi(t), \psi(t))$  көрүнүштө жазып, татаал функцияны дифференцирлөө эрежесин пайдалансак, акыркы ийри сызыктуу интегралды

$$\begin{aligned}
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) \right] dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F(\varphi(t), \psi(t)) dt = F(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\
&= F(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - F(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A) = \\
&= F(B) - F(A)
\end{aligned}$$

көрүнүштө эсептей алабыз. Мындан кандайдыр бир  $F(x, y)$  функциясы табылып, интеграл алдындагы (24) туюнтма, ага толук дифференциал болсо, анда ийри сызыктуу интегралдын мааниси  $L$  ийрисин формасынан көз каранды болбостон,  $F(x, y)$  функциясын ийринин учтарындагы  $F(B)$ ,  $F(A)$  маанилеринен гана көз каранды

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = F(B) - F(A) \quad (29)$$

болору келип чыгат. ◀

#### 16.4.2 Толук дифференциал болуу белгилери. Тик бурчтуу областта алгачкы функцияны табуу

Ийри сызыктуу интеграл алдындагы (24) туюнтмасы,  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болушу үчүн, кандай шарттарга баш ийүүсү керек?—деген суроого жооп издөө менен, ийри сызыктуу интеграл, кандай учурда интегралдоо жолунан көз каранды болбойт деген суроого жооп тапкан болобуз.

$D$  областында аныкталган эки өзгөрүлмөлүү  $F(x, y)$  функциясын толук дифференциалын жашашы үчүн, анын ушул областта  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$  жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функция болушун *биринчи шарт* деп эсептеп,  $D$  областында аныкталышкан

$P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  функцияларына  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялар болушун деген кошумча шарт коёбуз. Кошумча шарттан, өз кезегинде (28) ден алынган

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$  аралаш туундуларын жашашы жана үзгүлтүксүз функциялар болушу келип чыгат. Үзгүлтүксүз функциялардын аралаш туундулары тең болушкандыктан,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (30)$$

теңдештиги орун алат. Ошентип кошумча шарттан, интеграл алдындагы (24) туюнтманын толук дифференциал болушунун (30) зарыл шартына ээ болобуз, б.а. (24) туюнтма кандайдыр бир  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болсо, анда сөзсүз (30) теңдештиги аткарылат.

Экинчи жактан (30) жетиштүү шарт болобу, б.а. ал аткарылса, анда (24) туюнтмасына сөзсүз толук дифференциал болуучу  $F(x, y)$  функциясы табылабы?- деген суроого жооп берели.

**1) Оболу,  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  тик бурчтук болгон учурга токтололу.**

$D$  тик бурчтугунда  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  үзгүлтүксүз болушкандыктан,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \quad (31)$$

теңдемелерин экөөсүн тең канааттандырган  $F(x, y)$  функциясын табуу менен суроого жооп берүүгө болорун байкайбыз.

**у өзгөрүлмөсүн кыймылын убактылуу токтотуп, (\*)**

$c \leq y \leq d$  аралыгында турактуу деп ойлоп, (31) теңдемелерин биринчисин  $x$  боюнча  $[x_0, x]$  кесиндисинде интегралдасак ( $\forall x_0 \in [a, b]$ ),

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + C = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + F(x_0, y)$$

ээ болобуз. Мында  $C$  турактуу саны эркин тандалгандыктан, аны кыймылсыз  $(x_0; y)$  чекитиндеги  $C = F(x_0, y)$  -турактуу сан деп алуу жалпылыкты бузбайт ( $y$  кыймылы токтогон).

Эгерде  $x$  өзгөрүлмөсүн кыймылын  $a \leq x \leq b$  аралыгында убактылуу токтотуп, (31) теңдемелерин экинчисин  $y$  өзгөрүлмөсү боюнча  $[y_0, y]$  кесиндисинде интегралдап  $(\forall y_0 \in [c, d])$ ,  $x = x_0$  маанисин койсок,

$$F(x_0, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + F(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

келип чыгат. Акыркы маанини жогорку интегралга коюп, изделүүчү  $F(x, y)$  функциясын

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \quad (32)$$

көрүнүштө жазыларын көрөбүз.

Мында  $C = F(x_0, y_0) - const$ .

Чынында эле, каалагандай делген  $C$  турактуусун өзүбүзгө керектүү көрүнүштө тандаганыбызга карабай, табылган (32) функциясын

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \right] = P(x, y) + 0 + 0 = P(x, y); \\ 2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \right] = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x_0, y) + 0 = \\ &= \left| \begin{array}{l} (30) - \text{формулананы} \\ \text{колдонсок} \end{array} \right| = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q(x_0, y) = \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + Q(x_0, y) = Q(x, y) \end{aligned}$$

(31) теңдемелерин канааттандырыарын көрөбүз.

Демек тик бурчтуу область үчүн, (24) туюнтма толук дифференциал боло тургандай, (32) көрүнүштөгү  $F(x, y)$  функциясы



тургузулат же (30) шарты толук дифференциал болууга жетиштүү шарт боло алат.

Эгерде (\*) шартын өзгөртүп, оболу  $x$  өзгөрүлмөсүн кыймылын токтотуп,  $y$  өзгөрүлмөсү боюнча (31) теңдемелерин экинчисин интегралдоо менен баштап, экинчи этапта  $y$  тин кыймылын токтотуп, биринчисин  $x$  боюнча интегралдасак, изделүүчү алгачкы  $F(x, y)$  функциясы жазылуу формасы менен гана айырмаланган

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C \quad (33)$$

көрүнүштө жазылат.

## 2) D эркин берилген область болгон учур.

Бул учурда деле, D областында кармалып турган L ийриси боюнча алынган интегралдын, интегралдоо жолунан көз каранды болбой, ийринин башталуу жана бүтүү учтарынын жайгашуу абалдарынан гана көз каранды болушу үчүн, интеграл алдындагы (24) туюнтмасы, ушул эле областта берилген кандайдыр бир  $F(x, y)$  функциясына толук дифференциал болушу жетиштүү, ал эми D областынын **бир байламталуу жана квадратталуучу (чектүү аянтын эсептөөгө мүмкүн)** болушу зарыл шарттар болушат.

Жалпылап айтканда квадратталуучу жана бир байламталуу D областын бардык чекиттеринде (30) теңдештиги аткарылса, анда D областында толук кармалып турган каалагандай L ийриси боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын мааниси, ийринин формасынан көз каранды болбой, анын башталуу жана бүтүү учтарындагы чекиттерин абалдарынан гана көз каранды болот.

**Натыйжа.** *Гриндин (13) формуласын эске алып, ийри сызыктуу интегралдын интегралдоо жолунан көз каранды болбостугуна кепилдик берген (30) шартын пайдалансак, анда ийри сызыктуу интегралдын интегралдоо жолунан көз каранды эмес болушу үчүн, анын D областында толугу менен кармалышкан каалагандай L туюк ийрилери боюнча алынган интегралдарын нөлгө барабар болушу жетиштүү, ал*

эми  $D$  областын квадратталуучу жана бир бир байламталуу болушу зарыл шарттар болорун көрөбүз.

Мисал. 7) Каалагандай  $L$  туюк ийриси боюнча алынган

$$\oint_L (x^2 + y^2) (x dx + y dy) \text{ ийри сызыктуу интегралын мааниси}$$

нөлгө тең болорун далилдегиле. ► Ийри сызыктуу интегралды

$$\oint_L (x^2 + y^2) (x dx + y dy) = \int_L (x^2 + y^2)x dx + (x^2 + y^2)y dy$$

көрүнүштө кайра жазып,  $P(x, y) = (x^2 + y^2)x$ ,  $Q(x, y) = (x^2 + y^2)y$  функциялары (30) шартын канааттандыраарын текшеребиз.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = ((x^2 + y^2)x)'_y = 2y \cdot x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ((x^2 + y^2)y)'_x = 2x \cdot y$$

болуп, алардын тең экендигине ишенебиз. Демек, ийри сызыктуу интегралдын алдындагы

$$(x^2 + y^2)x dx + (x^2 + y^2)y dy \text{ туюнтмасы, кайсы бир } F(x, y)$$

функциясын толук дифференциалы болушу керек.  $F(x, y)$  функциясын (32) көрүнүштө издейли

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x (x^2 + y^2)x dx + \int_{y_0}^y (x_0^2 + y^2)y dy + C = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \int_{y_0}^y (x_0^2 + y^2) d(x_0^2 + y^2) + C = \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \Big|_{x_0}^x + \frac{(x_0^2 + y^2)^2}{4} \Big|_{y_0}^y = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - \frac{(x_0^2 + y^2)^2}{4} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(x_0^2 + y^2)^2}{4} - \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2}{4} + C = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} + C_1.$$

Мында  $C_1 = C - \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2}{4}$  — турактуу сан. Демек ийри сызыктуу интеграл алдындагы туюнтма,  $F(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$  функциясына толук дифференциал болуп, ийри сызыктуу интегралдын мааниси  $L$  ийрисиин формасынан көз каранды болбостон, ар дайыма  $F(B) - F(A)$  айырмасына барабар болот.  $L$  туюк ийрисиинде башталуу жана бүтүү учтары  $A = B$  дал келишкендиктен,

$$\oint_L (x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0 \text{ болот деген жыйынтык}$$

жоопко келебиз. ◀

8)  $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$  туюнтмасы толук дифференциал боло тургандай, алгачкы  $F(x, y)$  функциясын тургузгула.

►  $P(x, y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$ ,  $Q(x, y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$  жана

$x_0 = y_0 = 0$  деп алып, (33) формуласын пайдалансак, алгачкы функцияны

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C = \\ &= \int_0^x 5 dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4) dy + C = 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C \end{aligned}$$

көрүнүштө табабыз.

(32) формуласын колдонуп

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C = \int_0^x (4x^3y^3 - 3y^2 + 5) dx - \\ &- \int_0^y 4 dy + C = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C \end{aligned}$$

жазылуу формасы менен гана айыпмаланган, ошол эле  $F(x, y)$  алгачкы функциясын тургуздук. ◀

**Жалпылоо.**  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан  $\Omega$  телосунда, толугу менен кармалып турган  $L = AB$  ийриси боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

интегралдоо жолунан көз каранды болбой, ийринин  $A$  – башталуу жана  $B$  - бүтүү учтарынын жайгашуу абалдарынан гана көз каранды болушу үчүн, интеграл алдындагы туюнтманын кандайдыр бир  $F(x, y, z)$  функциясына толук дифференциал болушу зарыл жана жетиштүү шарт болот. (30) шартын жалпылап, үч өзгөрүлмөлүү функциянын толук дифференциал болуу шартын

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (30^A)$$

көрүнүштө жаза алабыз.

Бул учурда ийри сызыктуу интеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = F(B) - F(A)$$

маанисине ээ болот.

### **§ 16.5 Беттин аянты боюнча алынган 1 – түрдөгү (роддогу) кош интеграл. Материалдык беттин массасы**

Бир өзгөрүлмөлүү  $y = f(x)$  функциясынан, анык интеграл  $Ox$  абцисса огунун  $x \in [a, b]$  кесиндисиндеги чекиттер боюнча алынса, кош интеграл эки өзгөрүлмөлүү  $z = f(x, y)$  функциясынан  $xOy$  координаттык тегиздигинде жайгашкан жалпак  $D$  областын чекиттери боюнча алынат. Ийри сызыктуу интегралдар, бөлүкчө –жылмакай  $L$  ийрисин чекиттеринде аныкталган функциядан алынат. Анык жана кош интегралдар, функциянын аргументтери  $R, R^2$  мейкиндигиндеги координаттык октордун кесиндилеринде, координаттык тегиздиктердин чектелген бөлүктөрүндө эсептелишсе, ийри сызыктуу интегралдар

эркин абалда жайгашкан ийрилер боюнча эсептелет. Аларга окшоштуруп,  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан эркин беттер боюнча да, функциялардан интеграл алуу мүмкүнбү? – деген суроо туулат. Ошондуктан, мейкиндикте эркин абалда берилген фигуралардын беттеринде жайгашкан чекиттер боюнча өзгөргөн функциялардын маанилеринен интегралдык сумма түзүп, эркин абалда жайгашкан бет боюнча кош интеграл алуу ыкмасын көрсөтүп өтөлү.

Айталы,  $R^3$  мейкиндигинде  $z = \varphi(x, y)$  функциясын графиги болгон жылмакай же бөлүкчө – жылмакай жана квадратталуучу  $\Pi$  бетинин, ар бир  $M(x; y; z)$  чекиттеринде аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон  $u = f(M) = f(x, y, z)$  функциясы берилсин. Бул учурда,  $\Pi$  бетин  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы болгон  $D$  областы,  $z = \varphi(x, y)$  функциясына аныкталуу область болот.  $\Pi$  бетин  $n$  сандагы майда  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  бөлүкчө беттерге бөлүп, алардын аянттарын тиешелүү түрдө  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  деп белгилейли. Ар бир бөлүкчө беттерден эркин түрдө  $M_1, M_2, \dots, M_n$  чекиттерин тандап

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k, \quad (34)$$

$f(M)$  функциясы үчүн  $\Pi$  бетин аянты боюнча түзүлгөн (34) интегралдык суммасын түзөбүз.

**16.3 Аныктама.** Эгерде  $\Pi$  бетин кандай ыкмада бөлүкчөлөргө бөлгөнүбүзгө жана  $M_k$  чекиттерин тандаганыбызга карабастан,  $\Pi_k$  бөлүкчө беттерин диаметрлерин эң узуну нөлгө умтулгандагы (34) суммасын чектүү предели жашаса, анда пределдин мааниси  $f(M)$  функциясынан  $\Pi$  бетинин аянты боюнча алынган  $I$  – түрдөгү (роддогу) беттик интеграл деп аталып,

$$\iint_{\Pi} f(M) d\sigma \quad \text{же} \quad \iint_{\Pi} f(x, y, z) d\sigma \quad (35)$$

көрүнүштөгү символдор менен белгиленет.

Беттердин аянты боюнча алынган кош интегралдарда, кош интегралдардын бардык касиеттери аткарылат. Эгерде  $\Pi$  бети өз ара

бири – бирин каптабаган (жалпы чекиттери жок)  $\Pi_k$  бөлүкчө беттердин  $\Pi = \cup \Pi_k$  биригүүсүнөн турса ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), анда интегралдоонун

$$\iint_{\Pi} f(M) d\sigma = \sum_{k=1}^n \iint_{\Pi_k} f(M) d\sigma \quad (36)$$

эрежеси орун алат. Кош интегралдын бардык касиеттери 1 – түрдөгү беттик интеграл үчүн да туура болуп, беттик интегралды эсептөө маселеси кош интегралды эсептөөгө келтирилет. Ал үчүн **II бети координаттык тегиздиктердин бирине бир маанилүү проекциялансын** деген шарт коюлат. Айталы  $\Pi$  бети  $xOy$  координаттык тегиздигинде жайгашкан  $D$  областына бир маанилүү проекциялансын, анда төмөндөгү теорема орун алат.

**16.5 Теорема.** *Айталы,  $\Pi$  жылмакай бети  $z = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  теңдемеси менен берилип,  $z = \varphi(x, y)$  функциясы  $D$  областында болбогондо, анын кайсы бир  $D_1$  бөлүгүндө ( $D_1 \subset D$ ) жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болсун. Ошондой эле,  $f(x, y, z)$  функциясы да,  $\Pi$  бетинде аныкталган үзгүлтүксүз функция болсо, анда  $\Pi$  бети боюнча  $f(x, y, z)$  функциясынан алынган 1 – түрдөгү беттик интеграл*

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy \quad (37)$$

формуласы менен эсептелет.

Чынында эле теореманын шарттары аткарылганда XV – главада

(§ 15.4, (46\*)) белгиленгендей,  $d\sigma$  – беттин элементи

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (38)$$

көрүнүштө жазылат. Анда (35) беттик интегралына  $z = \varphi(x, y)$  жана беттин (38) элементин маанилерин коюп, аны (37) көрүнүштөгү кош интегралга келтирип эсептей алабыз.

Ошентип беттин (38) элементинин, координаттык тегиздиктердеги жазылуу формасын өзгөрүшүнө (§15.4 – кара) жараша,  $\Pi$  бетиндеги  $M(x; y; z)$  чекиттеринде аныкталган  $u = f(M) = f(x, y, z)$  функциясын  $\Pi$  бети боюнча I – түрдөгү беттик интегралын, үч ыкма менен кош интегралга келтирип эсептөөгө болот:

1)  $\Pi$  бети,  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги  $z = \varphi(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $D$  областына, бир маанилүү проекцияланганда (37) формула менен;

2)  $\Pi$  бети,  $yOz$  координаттык тегиздигиндеги  $x = \varphi(y, z)$  теңдемеси менен берилген  $W$  областына, бир маанилүү проекцияланганда:

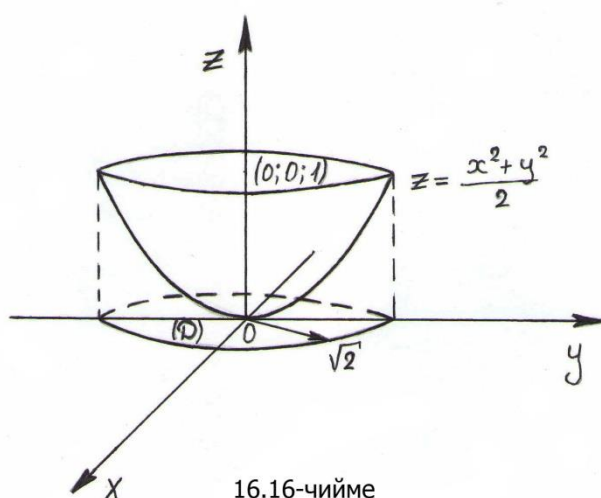
$$\iint_{\Pi} f(x, y, z) d\sigma = \iint_W f(\varphi(y, z), y, z) \sqrt{1 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2} dx dy \quad (39)$$

формуласы менен;

3)  $\Pi$  бети,  $xOz$  координаттык тегиздигиндеги  $y = \varphi(x, z)$  теңдемеси менен берилген  $G$  областына, бир маанилүү проекцияланганда:

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z) d\sigma = \iint_G f(x, \varphi(x, z), z) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_z)^2} dx dz \quad (40)$$

формуласы менен.



Бул үч учурда тең, бет боюнча алынган I – түрдөгү кош интегралдын мааниси бирөө гана болот, б.а. жазылуу формалары ар башка болгону менен, кош интегралдардын маанилери тең болушат.

Беттик интеграл аппаратын түзүлүшүнө түрткү берген мисалдардын бири катарында, бир тектүү эмес

жалпак материалдык беттин  $M$  массасын табуу маселесин айтууга

болот. Айталы, кайсы бир материалдык бет  $\Pi$  бетин формасында болуп, анын ар бир  $P$  чекитинде беттин тыгыздыгы  $\rho(P)$  үзгүлтүксүз функциясын маанилери боюнча өзгөрүп турсун ( $\rho(P) \geq 0$ ), б.а. бет боюнча масса үзгүлтүксүз бөлүштүрүлсүн. Эгерде  $\Pi$  областын майда  $\sigma_k$  бөлүкчөлөрдөн куралган деп элестетсек, анда анын ар бир майда бөлүкчөсүн массасын жакындаштырып

$\Delta m_k \approx \rho(P_k) \cdot \Delta \sigma_k$  деп эсептөөгө болот. Мында  $\Delta \sigma_k$  – майда бөлүкчөлөрдүн бирөөсүнүн аянты, ал эми  $\rho(P_k)$  – майда бөлүкчөлөрдө жайгашкан кайсы бир  $P_k$  чекитиндеги тыгыздык. Анда жетишерлик кичине  $\sigma_k$  бөлүкчөсүндө тыгыздыкты турактуу деп ойлоп, жалпы материалдык беттин  $M$  массасын, бөлүкчөлөрдүн массаларын суммасы катарында

$$M \approx \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \Delta \sigma_k$$

көрүнүштө жакындаштырып эсептейбиз. Катасыз масса, ушул сумманын  $\sigma_k$  бөлүкчөлөрүн диаметрлерин эң узуну нөлгө умтулгандагы пределдин мааниси катарында

$$M = \iint_{\Pi} \rho(P) d\sigma, \quad (41)$$

$\Pi$  бети боюнча  $\rho(P)$  функциясынан алынган 1 – түрдөгү беттик интеграл менен эсептелет.

Мисалы, 9)  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , ( $0 \leq z \leq 1$ ) параболасын кабыкчасын ар бир чекиттеринде тыгыздык  $\rho = z$  эрежеси менен өзгөрүп олтурса, анда бул кабыкчанын массасын тапкыла (16.16 - чийме).

► Изделүүчү массаны (41) формуласын негизинде беттик интегралга келтирип, аны (37) формуласы менен эсептейли.

$$M = \iint_{\Pi} \rho(P) d\sigma = \iint_{\Pi} z(x, y) d\sigma = \iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \\ z = 1 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}, \quad J = \rho \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho \, d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho^3 \, d\rho = \\
&= \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + \rho^2} = t, \rho = \sqrt{t^2 - 1}, d\rho = \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \\ \rho = 0 \Leftrightarrow t = 1, \quad \rho = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \end{array} \right| = \pi \int_1^{\sqrt{3}} (\sqrt{t^2 - 1})^3 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\
&= \pi \int_1^{\sqrt{3}} (t^2 - 1) t^2 \, dt = \pi \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1)
\end{aligned}$$

масса бирдигине ээ болобуз. ◀

10) II бети, радиусу  $R_0$  болгон сферанын жогорку бети болсо,

$\iint_{\Pi} z \, d\sigma$  беттик интегралын эсептегиле.

► Сферанын жогорку жарымы  $z = \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2}$  теңдемеси менен берилгендиктен, (37) формуланы пайдалансак,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi} z \, d\sigma &= \iint_D \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy = \\
&= \iint_D \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-2x}{2\sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{-2y}{2\sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} \, dx \, dy = \\
&= \iint_D \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{\frac{R_0^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R_0^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = R_0 \iint_D dx \, dy = R_0 \cdot S_D
\end{aligned}$$

келип чыгат. Мында  $S_D$  деп,  $D$  областын аянты алынган.  $D$  областы же  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R_0^2\}$  тегереги, II жарым сферасын  $xOy$  тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы болуп, анын аянты

$S_D = \pi R_0^2$  болот.

Демек,  $\iint_{\Pi} z \, d\sigma = \pi R_0^3$  деген

жоопту алабыз. ◀

## § 16.6 II – түрдөгү беттик кош интегралдар

### 16.6.1 Мейкиндиктерде беттердин багыттарын аныктоо эрежелери

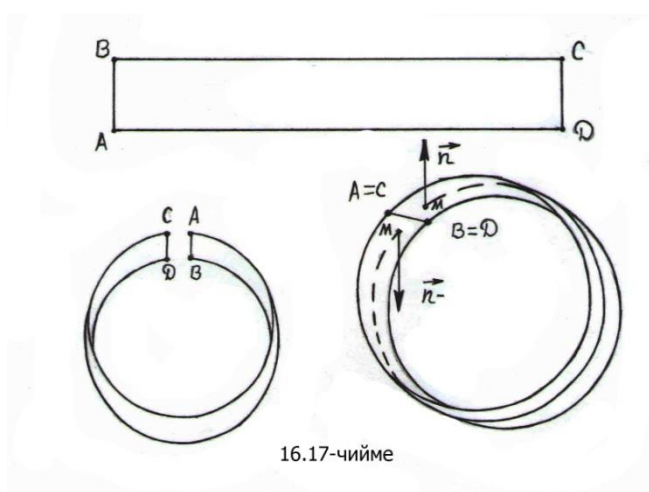
Экинчи түрдөгү беттик интеграл, экинчи түрдөгү ийри сызыктуу интеграл түшүнүгүн жалпылоо менен түзүлөт. Экинчи түрдөгү ийри сызыктуу интегралда, ийринин багытына жараша элементтерге (бөлүкчөлөргө) бөлүп, элементтердин узундуктарын жана алардын координаттык октордогу проекцияларын, координаттык октордун багыттары менен дал келүү же келбөөсүнө жараша (+) же (–) белгилери менен алганбыз.

Мейкиндиктеги беттердин багыттарын, беттин эки тараптарына карата аныктоочу эреже киргизебиз. Эгерде бет айкын көрүнүштөгү

$z = f(x, y)$  функциясы менен берилсе, анда  $Oz$  огун вертикалдык багытына салыштырып, беттин жогорку жана төмөнкү тараптарын белгилөөгө болот. Ошондой эле, мейкиндиктеги кайсы бир телону чектеп турган турган беттин (кабыктын) да, ички жана сырткы эки тараптары болору белгилүү болгону менен, жалпы учурда беттин тараптарын кантип аныктоого боло тургандай эрежеге муктажбыз.

Айталы, мейкиндикте бөлүкчө – жылмакай, б.а. беттин бардык чекиттеринен бетке жаныма тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн болгон же өзгөчө чекиттери жок  $\Pi$ – бети берилсин. Беттин ар бир чекиттеринен жаныма тегиздиктерди жүргүзсөк, анда беттеги жануу чекиттерин үзгүлтүксүз өзгөрүп кыймылдаганына жараша, жаныма тегиздиктердин жайгашуу абалдары да үзгүлтүксүз өзгөрүп барат.

II бетинен эркин тандалган  $M_0$  чекитин алып, ушул чекитте II бетине нормаль жүргүзүп, багытточу косинустарына жараша нормалга белгилүү бир багытты ыйгаралы. Бетке  $M_0$  чекитинде бири – бирине карама – каршы багыттагы, багытточу косинустары менен айырмаланышкан эки нормалдарды гана жүргүзө аларыбыз белгилүү. Бетте  $M_0$  чекитинен башталып II бетинин чек арасын кесип өтпөстөн, кайрадан  $M_0$  чекитине келип бүтүүчү каалагандай туюк ийри сызалы. Туюк ийри сызыктан  $M$  чекитин алып, аны ийри боюнча башынан акырына чейин жылдырып келели. Баштапкы  $M_0$  чекитинен жүргүзүлгөн нормалдын багытын эстеп калып,  $M$  чекиттеринде бетке жүргүзүлгөн нормалдар жылуу жолунда баштапкы багыттарын сактап калабы же айрым чекиттерде карама – каршы багытка өзгөрүп кетеби – деген маселеге токтолобуз. Мындай абалды эки учурга бөлүп карайлы:



1) Эгерде беттин чек арасын кесип өтпөгөн туюк ийри боюнча жол жүрүп,  $M_0$  чекитине кайра келгенге чейин нормаль баштапкы багытын сактап келсе, анда бетти эки тараптуу деп эсептейбиз.

2) Эгерде беттин чек арасын кесип өтпөстөн, туюк ийри боюнча кайра  $M_0$  чекитине

жылып келген жүрүү жолунда, нормаль баштапкы багытынан карама – каршы багытка өзгөрсө, анда бетти бир тараптуу дейбиз.

$M_0$  чекити жана андан чыгып кайра кайтып келген туюк ийри эркин тандалгандыктан, жогорку ырастоолор бүтүндөй II бетинде туура болот деп эсептейбиз.

Практикада жолуккан беттердин дээрлик көпчүлүгү эки тараптуу болгондуктан, бир тараптуу беттерге мисал катары Мёбиустун бети деп аталган бетти көрсөтөлү: Кагазды узун тилке тик бурчтук сыяктуу кесип, анын чокуларын ABCD тамгалары менен белгилеп, тилкени бир жолу бурап, анын учтарын A чокусу менен C чокусу, B чокусу менен D чокусу дал келе тургандай жабыштырабыз (16.17 – чийме).

Ошентип, эки тараптуу  $\Pi$  бетинде эки багыт бар: биринчиси беттин баштапкы нормалын багытын сактаган чекиттерин көптүгүн түзгөн бөлүгү үчүн алынган нормалдын багыты, экинчиси беттин баштапкы нормалын багытына карама – каршы багыттагы нормалга ээ болгон чекиттерин көптүгүн түзгөн бөлүгү үчүн алынган нормалдын багыты.

Бул багыттардын кайсынысын оң, кайсынысын терс багыт деп аларыбызды тактап алалы.

Айталы, туюк формада болбогон  $\Pi$  бети  $L$  жөнөкөй контуру (ийриси) менен чектелип турсун, анда беттин **оң багыты** деп  $L$  ийрисин бойлоп сааттын багытына каршы басканда, беттин чекиттерине түшүрүлгөн нормалдардын багыттары дайыма «буттан башты» көздөй багытталган тарабын айтабыз. Анын **карама – каршысын терс багыт** деп алабыз. Мисалы,  $\Pi$  бети  $z = \varphi(x, y)$  айкын теңдемеси менен берилсе, анда  $Oz$  ке **салыштырылган жогорку бети оң багыт, төмөнкү бети терс багыт** деп алынат. Ал эми  $\Pi$  туюк формадагы бет болсо, анда ал кайсы бир  $\Omega$  телосун чектеп турган чек ара кабык – бети катарында эсептелип, оң багыт катарында телонун  $\Pi$  кабыгын сырткы **бети**, терс багыт катарында **ички бети** алынат.

### 16.6.2 $\Pi$ - түрдөгү беттик кош интегралдардын аныктамасы

Айталы,  $Oxyz$  координаттык мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир  $\Omega$  телосунда толук кармалып турган эки тараптуу  $\Pi$  бөлүкчө – жылмакай бети,  $z = \varphi(x, y)$  айкын теңдемеси менен берилсин. Бул учурда бет жогорку жана төмөнкү тараптарга ээ болгондуктан, оң багыт катары анын жогорку бетин алабыз (беттин чек ара сызыгын бойлоп саат багытына каршы басканда, нормаль «буттан башты» карайт).  $z = \varphi(x, y)$  функциясы  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги бөлүкчө – жылмакай контур менен чектелген  $D$  областында аныкталган функция болгондуктан,  $D$  областы  $\Pi$  бетинин  $xOy$  тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы болуп, контурундагы кыймыл  $\Pi$  бетин багыты менен дал келет деп эсептейбиз.

Айталы, жогорудагы берилген  $\Pi$  бетинде, кандайдыр бир

$f(M) = f(x, y, z)$  функциясы аныкталсын ( $(x; y; z) \in \Pi$ ).  $\Pi$  бетинин жогорку тарабында же оң багытта иш алып бара жатабыз деп ойлоп, бетти  $n$  сандагы  $\Pi_i$  – майда элементтерге бөлсөк, анда элементтердин  $xOy$  тегиздигиндеги  $D_i$  – проекцияларында да оң багыт сакталып аянттары « + » белги менен алынат, б.а. элементтердин проекцияларын контуру менен саат стрелкасына каршы басканда проекциялардын ички бөлүгү сол жакта калат.

Беттин элементтери:  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ ; тиешелүү аянттары  $\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n$ .

Проекциялары:  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ; тиешелүү аянттары:  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ .

Ар бир  $\Pi_i$  бөлүкчөлөрүнөн эркин абалда  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  чекиттерин тандап, функциянын ушул чекиттеги  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  маанисине,  $\Pi_i$  бөлүкчөсүн проекциясын  $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$  аянтын көбөйтүп суммаласак,

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (42)$$

көрүнүштөгү интегралдык сумма түзгөн болобуз.

**16.4 Аныктама.** Эгерде (42) суммасынын  $\Pi_i$  бөлүкчөлөрүн диаметрлерин эң узуну  $d = \sup\{\text{diam } \Pi_i\} \rightarrow 0$  умтулгандагы чектүү предели жашаса, анда анын мааниси  $f(M) = f(x, y, z)$  функциясынан  $\Pi$  бетин тандалган тарабындагы багыт боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл деп аталып, символикалык түрдө

$$\iint_{\Pi} f(M) dx dy = \iint_{\Pi} f(x, y, z) dx dy \quad (43)$$

көрүнүштө белгиленет.

Эгерде  $\Pi$  бетин төмөнкү тарабы же терс багыт алынса, анда  $\Pi_i$  бөлүкчөлөрүн  $xOy$  тегиздигиндеги проекцияларын аянты (–) белгиде эсептелгендиктен, (43) формула

$$\iint_{\Pi_-} f(M) dx dy = - \iint_{\Pi} f(x, y, z) dx dy \quad (44)$$

көрүнүштө жазылат.  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралдарда кош интегралдын бардык касиеттери сакталат, анткени кош интегралдын түзүлүү табыяты ошол бойдон калып, болгону интеграл алынуучу областтын (фигуранын) формасы гана өзгөрдү, б.а. кош интеграл  $xOy$  тегиздигинде жаткан жалпак фигура боюнча алынса,  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл үч ченемдүү мейкиндикте жайгашкан  $\Pi$  бети боюнча алынат.

Айрым учурларда  $\Pi$  бетин  $yOz$ , же  $xOz$  координаттык тегиздиктерине проекциялап,  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралды тиешелүү түрдө

$$\iint_{\Pi} f(M) dydz = \iint_{\Pi} f(x, y, z) dydz \quad \text{же} \quad \iint_{\Pi} f(M) dxdy = \iint_{\Pi} f(x, y, z) dxdy$$

көрүнүштөрдө жазабыз. Бирок, жалпы учурда  $\Pi$  бетин бардык координаттык тегиздиктердеги проекцияларын эске алып,  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралды

$$\iint_{\Pi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (45)$$

көрүнүшкө келтирип жазууга болот.

### 16.6.3 $\Pi$ – түрдөгү беттик кош интегралдын вектордук формада жазылышы

Айталы,  $Oxyz$  координаттык мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир  $\Omega$  телосунда

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вектордук талаасы берилсин.

$\Omega$  телосунда жайгашкан бөлүкчө – жылмакай, б.а. ар бир чекитинде жаныма тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн болгон  $\Pi$  бетин оң багытын алалы. Оң багытка ылайыкташкан координаталары

(багыттоочу косинустары) менен,  $\Pi$  бетин ар бир чекитинде бетке түшүрүлгөн  $\vec{n}$  бирдик – нормаль векторлорун

$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  көрүнүштө жазалы. Мында  $\vec{n}$  вектору менен  $Ox$  огу  $\alpha = \widehat{i, \vec{n}}$ ;  $Oy$  огу  $\beta = \widehat{j, \vec{n}}$ ;  $Oz$  огу  $\gamma = \widehat{k, \vec{n}}$  бурчтарын түзүшөт.

Бул учурда  $\Pi$  бети боюнча  $\vec{F}(x, y, z)$  вектордук талаасын

$$\text{агымын } \iint_{\Pi} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma \quad (46)$$

$\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл көрүнүшүндө жазууга болот.

Чынында эле скалярдык көбөйтүүнү координаталары менен

$(\vec{F}, \vec{n}) = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$  жазып, (46) га койсок,

$$\iint_{\Pi} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Pi} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma$$

теңдештиги келип чыгып, анын оң жагында  $\vec{F} = \{P; Q; R\}$  вектордук функциясынан  $\Pi$  бети боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл турганына ишенүүгө болот. Толук ишенүү үчүн, багыттоочу косинустар менен  $d\sigma$  – беттин аянтын элементин көбөйтүндүлөрүн иликтеп көрөбүз:

1)  $Oz$  огу менен бетке түшүрүлгөн  $\vec{n}$  нормалын арасындагы  $\gamma$  бурчу тар болсо, анда  $\cos \gamma \geq 0$  оң болуп (§ 15.4 темасындагы (44) формуласын кара),

$$\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i = |\cos \gamma_i| \cdot \Delta \sigma_i = \cos \gamma_i \cdot \Delta \sigma_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (*)$$

болгондуктан  $\cos \gamma \cdot d\sigma$  – чоңдугу, аянттын  $d\sigma$  – элементин  $xOy$  координаттык тегиздигиндеги проекциясынын аянтына тең болот, б.а.  $dx dy = \cos \gamma \cdot d\sigma$ .

2) Ушундай эле талкуулоолордун жардамы менен,  $\Pi$  бетин  $yOz$  тегиздигиндеги проекциясын алып,  $\alpha$  – тар бурч болгондо

$$dy dz = \cos \alpha \cdot d\sigma ;$$

$zOx$  координаттык тегиздигиндеги проекциясын алып,  $\beta$  – тар бурч болгондо  $dz dx = \cos \beta \cdot d\sigma$  теңдештиктери орун аларына ишенебиз.

$$\text{Демек, жалпы учурда } \begin{cases} \cos \gamma \cdot d\sigma = \pm dx dy, \\ \cos \alpha \cdot d\sigma = \pm dy dz, \\ \cos \beta \cdot d\sigma = \pm dz dx \end{cases} \text{ болуп,} \quad (**)$$

" $\pm$ " белгилерин бири,  $\Pi$  бетин тандалган тарабындагы багыттоочу косинустардын белгилерине жараша тандалып алынат (бизде оң).

Табылган маанилерди акыркы интегралдык теңдештикке коюп,

$$\iint_{\Pi} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Pi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (47)$$

жалпы учурдагы вектордук формада жазылган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл менен, скалярдык формада жазылган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралды байланыштырган (47) формуласына ээ болобуз.

Ошентип,  $I$  – түрдөгү беттик кош интеграл  $\Pi$  бетин чекиттериндеги бөлүкчө элементтер боюнча алынып, бардык учурда бөлүкчөнүн аянты өзгөрбөгөндүктөн, беттин багытынан көз каранды болбойт. Ал эми  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл беттин белгилүү бир тарабынын бөлүкчө элементтерин координаттык тегиздиктеги проекциялары боюнча алынып, беттин тандалган тарабын багытына жараша проекцияларын аянттарын белгилери өзгөрүп тургандыктан, (+) же (–) белгилери менен эсептелет, б.а. беттин тандалган тарбынын багытынан көз каранды болот.

#### 16.6.4 Туяк формадагы бет боюнча вектордук агым. Гаусс – Остроградскийдин формуласы

Айталы, үч ченемдүү  $Oxyz$  координаттык мейкиндигин кайсы бир кубдаштырылуучу  $V$  областында (бөлүгүндө),



$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вектордук талаасы берилип, вектор – функция координаталарын жекече  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  туундулары менен кошо  $V$  областында үзгүлтүксүз функциялар же интегралдануучу болушсун. Анда вектордук талаанын дивергенциясы деп аталган

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (48)$$

сумма,  $V$  областында үзгүлтүксүз скалярдык функция болот. Гамильтондун  $\nabla$  – «набла» деп аталып (2 – бөлүк, § 10.5),

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  көрүнүштө белгиленген вектор – операторун пайдаланып, (48) ди  $\nabla$  жана  $\vec{F}$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү катарында  $\operatorname{div} \vec{F} = (\nabla, \vec{F})$  көрүнүштө жазса да болот.

Мейкиндиктин  $V$  бөлүгүн (областын), кабык сымал  $G$  бети курчап турсун.  $G$  бети, бөлүкчө – жылмакай же ар бир чекитинде жаныма тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн болгон туюк формада болуп,  $G$  бетинин  $xOy$  тегиздигиндеги бир маанилүү проекциясы  $D$  жалпак областын түзсүн.  $V$  областы, өзүнү чектеп турган  $G$  кабык – бетин толугу менен кармап турсун дейли. Анда  $V$  областын чектеп курчап турган мындай туюк **формадагы  $G$  бети боюнча өткөн  $\vec{F}$  векторун агымы**

$$\iint_G (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma \quad (49)$$

формуласы менен эсептелет.

Бул учурда,  $V$  областы боюнча (48) скалярдык функциясынан алынган

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

үчтүк интеграл менен,  $V$  областын чектеп курчап турган, каалагандай туюк формадагы  $G$  бети боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралды байланыштырган

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iint_G (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma, \quad (50)$$

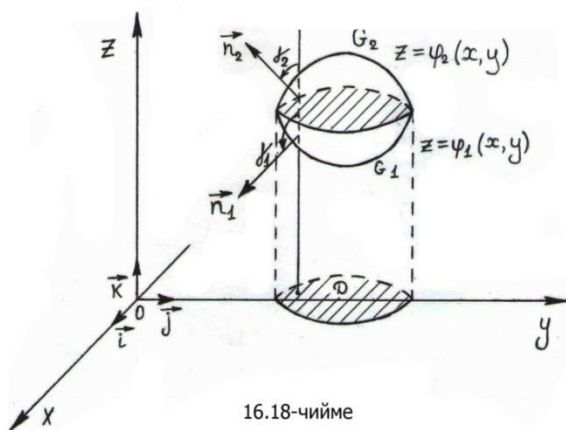
**Гаусс – Остроградскийдин формуласы** орун алат. Бул формула

$V$  областын чектеп турган каалагандай туюк формадагы  $G$  бети аркылуу өткөн  $\vec{F}$  вектордук агым,  $V$  областы боюнча алынган үчтүк интегралга барабар болорун ырастайт.  $dv$  деп  $V$  областындагы көлөмдүн элементи алынып, ал тандалган координаталарга жараша

өзгөрүп турат. Мисалы, тик бурчтуу координаталарда  $dv = dx \, dy \, dz$ , цилиндрдик координаталарда

$dv = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$ , сфералык координаталарда

$dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$  болушат.



Беттик интегралды, туюк формадагы  $G$  бетин

мейкиндикке караган сырткы тарабы боюнча алынган деп эсептейбиз.

Гаусс – Остроградскийдин формуласын тууралыгын далилдейли:

►  $V$  телосунда кармалып, аны кабык сымал курчап чектеп турган туюк формадагы  $G$  бети бөлүкчө – жылмакай болуп,  $Oz$  огуна параллель болгон каалагандай түз, аны экиден ашык эмес чекиттерде гана кесип өтсүн деген шарт коёлу. Мындай шарт,  $G$  бетин төмөн жагынан

$z = \varphi_1(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $G_1$  бетинен, жогору жагынан  $z = \varphi_2(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $G_2$  бетинен тургандай абалда элестетүүгө мүмкүнчүлүк берип,  $G_1, G_2$  беттерин экөөсүнүн тең  $xOy$  тегиздигиндеги бир маанилүү проекциялары  $D$  областы болоруна кепилдик берет (16.18 - чийме).

$z = \varphi_1(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $G_1$  бети,  $D$  областынан башталган  $Oz$  огуна параллель түздөрдү бойлоп  $G$  бетин «тешип кирүү» чекиттери болсо,  $z = \varphi_2(x, y)$  теңдемеси менен берилген  $G_2$  бети,  $G$  бетин «тешип чыгуу» чекиттеринен куралат.

$\frac{\partial R}{\partial z}$  – жекече туундусунан (функциясынан)  $V$  областы боюнча

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$$

үчтүк интеграл алып көрөлү: Үчтүк интегралды

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D [R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy = \\ &= \iint_{G_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{G_1} R(x, y, z) dx dy \quad (51) \end{aligned}$$

$\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралдардын суммасына келтиребиз. Экинчи кошулуучуда  $G_1$  бети  $G$  бетинин төмөн жагында жайгашкандыктан,  $Oz$  огу менен  $\vec{n}_1$  – нормалын арасындагы  $\gamma_1$  бурчу кең болуп (терс багыт),  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интеграл « $-$ » белгиси менен алынып, интеграл алдындагы « $-$ » белгисин ордуна « $+$ » белги коюлган.

(51) формуласындагы  $G_2$ ,  $G_1$  беттери боюнча алынган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралдарды, бир  $G$  бети боюнча алынган беттик кош интеграл катарында жазып, беттик кош интеграл менен  $V$  областынан  $\frac{\partial R}{\partial z}$  – функциясы боюнча алынган үчтүк интегралдын арасындагы

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_G R(x, y, z) dx dy \quad (52)$$

байланыш формуласына ээ болобуз.

Ушундай эле ыкма менен  $G$  бетин  $xOz$  жана  $yOz$  координаттык тегиздиктериндеги проекцияларын пайдаланып,

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz \text{ жана } \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

үчтүк интегралдарын эсептесек,

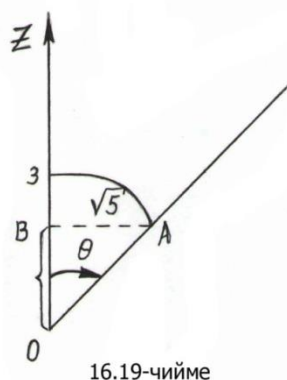
$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_G Q(x, y, z) dx dz \quad (53)$$

$$\text{жана } \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_G P(x, y, z) dz dy \quad (54)$$

теңдештиктери келип чыгат. (52), (53), (54) формулаларын мүчөлөп кошуп жиберсек, анда

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_G P(x, y, z) dy dz + \iint_G Q(x, y, z) dz dx + \iint_G R(x, y, z) dx dy \end{aligned} \quad (55)$$

теңдештиги орун алып, Гаусс – Остроградскийдин скалярдык көрүнүштө жазылган (55) формуласын келтирип чыгарган болобуз. Мындан (47), (48) формулаларын эске алып, вектордук жазылыштагы Гаусс – Остроградскийдин формуласын алууга болот. ◀



Ошентип, Гаусс – Остроградскийдин формуласы  $V$  областы боюнча алынган үчтүк интеграл менен,  $V$  областында толугу менен кармалып, аны кабык сымал курчап чектеп турган, туюк формадагы каалагандай  $G$  бетинен алынган  $\Pi$  – түрдөгү беттик кош интегралды байланыштырып турат. Туюк ийри сыяктуу эле,  $G$  туюк формадагы бет болгондуктан, айрым адабияттарда

(55) формуласындагы кош интеграл  $\oiint$  - символу менен белгиленип жазылат.

Эгерде кайсы бир  $V$  областында  $\vec{F}$  вектордук талаасын дивергенциясы  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  болсо, анда талааны түтүкчө көрүнүштө (соленоидальное) дейбиз. Бул учурда  $V$  областында кармалып, аны чектеп курчап турган туюк формадагы  $G$  бети боюнча өткөн вектордук агым, туюк формадагы беттин формасынан көз каранды болбостон

$$\oiint_G (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 0 \text{ маанисине ээ болот.}$$

### Мисалдар

11)  $z = 2$  тегиздиги менен кесилген

$\Pi: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (z \geq 2)$  сферанын бөлүгүн сырткы тарабы аркылуу өткөн  $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$  вектордун агымын тапкыла (сферанын бөлүгү туюк формада эмес).

► Сфера  $\Phi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  теңдемеси менен берилген, анда сферанын сырткы тарабында жайгашкан  $P(x; y; z)$  чекитинен жүргүзүлгөн нормаль – вектор

$\vec{n}_P = \{\Phi'_x(P); \Phi'_y(P); \Phi'_z(P)\} = \{2x; 2y; 2z\}$  көрүнүштө болуп, анын бирдик вектору  $\vec{n}_P^0 = \frac{\vec{n}_P}{|\vec{n}_P|} = \frac{\vec{n}_P}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{2\{x; y; z\}}{6} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}$  көрүнүштө табылат.

Сфералык  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$  координаталарга өтсөк,

өзгөрүлмөлөр

$r = 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \arccos \frac{2}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  аралыктарында өзгөрүп, беттин элементи Якобианды эске алганда  $d\sigma = 9 \sin \theta d\theta d\varphi$  көрүнүштө жазылат (16.19 – чийме).  $(\vec{F}, \vec{n}_P^0)$  – скалярдык көбөйтүндүсүн

$$(\vec{F}, \vec{n}_P^0) = \frac{x^2z + y^2z + z^3}{3} = \frac{z(x^2 + y^2 + z^2)}{3} = \frac{9z}{3} = 3 \cdot 3 \cos \theta = 9 \cos \theta$$

координаталары боюнча аткарып, (49) дун негизинде

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= 9 \iint_{\Pi} \cos \theta d\sigma = 9 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= 18\pi \cdot \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin \theta d(\sin \theta) = 18\pi \cdot 9 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left| \sin^2 \left( \arccos \frac{2}{3} \right) = 1 - \cos^2 \left( \arccos \frac{2}{3} \right) = \right. \\ &= \left. = 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5}{9} \text{ формуласы боюнча} \right| = 18\pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{5}{9} \right) = \end{aligned}$$

= 36π жообуна ээ болобуз. ◀

12) П :  $x^2 + y^2 = 4$  цилиндрдик бетин  $z = 0$  жана  $x + y + z = 4$  тегиздиктери менен кесилген бөлүгүн сырткы тарабы боюнча өткөн

$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} - e^{xyz} \vec{k}$  вектордун агымын тапкыла.

► Цилиндрдик бет туюк формада болбогону менен, аны толугу менен кармап турган V областын төмөн жагынан  $z = \varphi_1(x, y) = 0$  теңдемеси менен берилген  $G_1$  бети, жогору жагынан  $z = \varphi_2(x, y) = 4 - x - y$  теңдемеси менен берилген  $G_2$  бети, каптал жагынан  $x^2 + y^2 = 4$  цилиндрдик бети менен чектелип турган туюк формадагы область катарында элестетүүгө болот. Биз туюк эмес формада болгон цилиндрдик беттин бөлүгү боюнча өткөн вектордун агымын табабыз. Беттин ар бир  $P(x; y; z)$  чекитинен жүргүзүлгөн нормаль – вектор  $\vec{n}_P = \{\Phi'_x(P); \Phi'_y(P); \Phi'_z(P)\} = \{2x; 2y; 0\}$  координаталарына ээ болуп, бирдик нормаль – вектор

$$\vec{n}_P^0 = \frac{\vec{n}_P}{|\vec{n}_P|} = \frac{\vec{n}_P}{\sqrt{4(x^2+y^2+0^2)}} = \frac{2\{x; y; 0\}}{2 \cdot 2} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}}{2} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2} \quad \text{көрүнүштө}$$

табылат. Мында  $\Phi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$  – цилиндрдик беттин айкын эмес көрүнүштө жазылган теңдемеси.

$$\text{Цилиндрдик} \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad \text{координаталарга өтсөк, берилген бетти}$$

$\rho = 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi$  аралыктарда өзгөргөн цилиндрдик координаталарда сүрөттөөгө болот. Анда скалярдык көбөйтүүнү координталары боюнча аткарып,

$$(\vec{F}, \vec{n}_p^0) = \frac{xy + xy - 0 \cdot e^{xyz}}{2} = x \cdot y = 4 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \text{ табабыз.}$$

(49) формуласын колдонуп, вектордук агымдын

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= 4 \iint_{\Pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi |J| d\sigma = \left| \text{Якобиан} \right| = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \int_0^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} dz = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cdot \sin \varphi)(4 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi) d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} (4 \cos \varphi \cdot \sin \varphi - 2 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 32 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot d(\sin \varphi) + 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) - 16 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d(\sin \varphi) = \\ &= \left[ 32 \left( \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right) + 16 \left( \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) - 16 \left( \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ болорун көрөбүз. } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

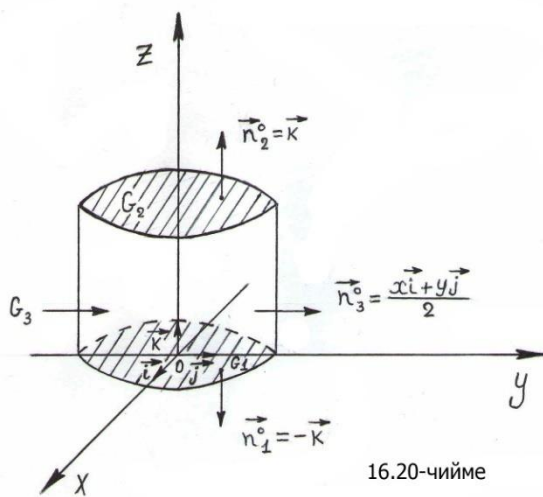
13)  $G = \{x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1\}$  – туюк формадагы бет аркылуу өткөн  $\vec{F} = 2x \vec{i} - (z - 1) \vec{k}$  векторун агымын тапкыла.

► 1) G бети туюк формада болгондуктан, ал аркылуу өткөн вектордун агымын Гаусс – Остроградскийдин формуласы менен эсептөөгө болот. Биздин учурда  $P = 2x, Q = 0, R = -(z - 1)$ , анда

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv &= \iiint_V (2 + 0 - 1) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \\ &= V_{\text{көлөм}} = 2\pi r \cdot H = 2\pi \cdot 2 \cdot 1 = 4\pi. \end{aligned}$$

2) Ушул эле натыйжага вектордун агымын аныктамасы болгон (49) формуласын пайдаланып жетүүгө болот.

Ал үчүн  $G$  бетинен өткөн вектордун агымын,  $G = G_1 + G_2 + G_3$  үч беттер аркылуу өткөн вектордун агымдарын суммасы катарында издейли (16.20 – чийме). Айталы,



$A_1$  деп  $G_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$  негизинен өткөн агымды,

$A_2$  деп  $G_2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$  жогорку бетинен өткөн агымды,

$A_3$  деп  $G_3 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$  каптал бетинен өткөн агымды белгилейли. Анда

$$A_1 = \iint_{G_1} (\vec{F}, \vec{n}_1^0) d\sigma = \left| \begin{array}{l} \vec{n}_1^0 = -\vec{k} \\ \Phi(P) \equiv z = 0 \\ \text{тегизд. бир. норм.} \end{array} \right| = \iint_{G_1} (z - 1) d\sigma = \int_{z=0} |z = 0| =$$

$$= - \iint_{G_1} d\sigma = -S_{G_1} = -\pi r^2 = -4\pi,$$

$$A_2 = \iint_{G_2} (\vec{F}, \vec{n}_2^0) d\sigma = \left| \begin{array}{l} \vec{n}_2^0 = \vec{k} \\ \Phi(P) \equiv z - 1 = 0 \\ \text{тегизд. бир. норм.} \end{array} \right| = - \iint_{G_2} (z - 1) d\sigma =$$

$$= - \iint_{G_2} (1 - 1) d\sigma = 0 \text{ маанилерине ээ болуп,}$$

цилиндрдик  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases}$  координаталарга өткөндөн кийин,  $G_3$  бети

$\rho = 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1$  аралыктарында чектелген болот.



$\Phi(P) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$  бетин, бирдик  $\vec{n}_3^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2}$  нормаль – вектору менен  $\vec{F}$  векторун скалярдык көбөйтүндүсүн координаталары боюнча  $(\vec{F}, \vec{n}_3^0) = x^2$  аткарып,

$$A_3 = \iint_{G_3} (\vec{F}, \vec{n}_3^0) d\sigma = \iint_{G_3} x^2 |J| d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4 \cos^2 \varphi \cdot 2 dz =$$

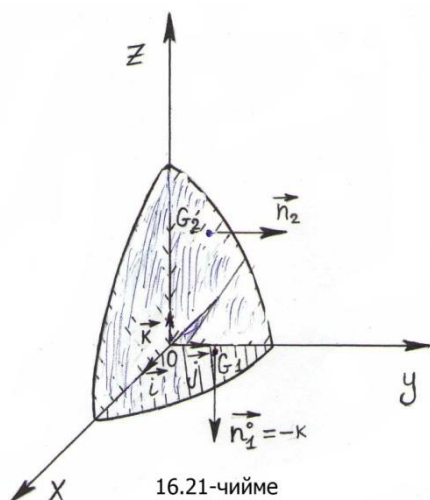
$$= 4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 4 \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)_0^{2\pi} = 8\pi \quad (|J| = \rho = 2)$$

ээ болобуз. Демек  $A = A_1 + A_2 + A_3 = -4\pi + 0 + 8\pi = 4\pi$  болуп, Остроградскийдин формуласын колдонгон учурдай эле, жоопту алабыз. ◀

14) Борбору координата башталмасында жайгашып, радиусу  $l$  болгон туюк формадагы сфера аркылуу өткөн  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  радиус – векторун агымын тапкыла.

► 1) Остроградскийдин формуласын колдонолу:  $P = x, Q = y, R = z$ . Демек,

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3V_{\text{көм}} = 3 \frac{4}{3} \pi l^3 = 4\pi l^3.$$



2) (49) формуласын пайдаланалы:  $\Phi(P) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$  сферасы үчүн бирдик нормаль  $\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{l}$  көрүнүштө болгондуктан, скалярдык көбөйтүндүнү  $(\vec{F}, \vec{n}^0) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{l} = \frac{l^2}{l} = l$  таап, (49) дан

$$\iint_G (\vec{F}, \vec{n}^0) d\sigma = l \iint_G d\sigma = l \cdot S_G = l \cdot 4\pi l^2 = 4\pi l^3$$

жогорудагыдай эле жооп келип чыгат. ◀

15)  $\begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ z = 0 \quad (z \geq 0) \end{cases}$  шартына баш ийген  $G$  туюк формадагы бет аркылуу өткөн  $\vec{F} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$  векторун агымын тапкыла.

► 1) (49) формуласын пайдаланалы. Ал үчүн  $G$  бетин  $z = 0$  бөлүгүн  $G_1$  бети, ал эми  $z = 9 - x^2 - y^2$  бөлүгүн  $G_2$  деп,  $G$  бетин алардын

$G = G_1 + G_2$  суммасы катарында карайбыз (16.21 – чийме).  $G_1$  бетин бирдик нормаль – вектору  $\vec{n}_1^0 = -\vec{k}$  болуп, скалярдык көбөйтүндүнү  $(\vec{F}, \vec{n}_1^0) = (3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}, -\vec{k}) = (-z) \cdot (-1) = z$  эсептеп,

$$A_1 = \iint_{G_1} (\vec{F}, \vec{n}_1^0) d\sigma = \iint_{G_1} z d\sigma = \left| \begin{array}{c} z = 0 \\ \text{тегиздигинде} \end{array} \right| = 0 \text{ табабыз.}$$

$G_2$  бети  $\Phi(P) \equiv z - 9 + x^2 + y^2 = 0$  теңдемеси менен берилгендиктен, нормаль – вектору

$$\vec{n}_2 = \{\Phi'_x(P); \Phi'_y(P); \Phi'_z(P)\} = \{2x; 2y; 1\} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

көрүнүштө болуп,

$$A_2 = \iint_{G_2} (\vec{F}, \vec{n}_2) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (\vec{F}, \vec{n}_2)|_{z=9-x^2-y^2} dx dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (6x^2 - 2y^2 - z)|_{z=9-x^2-y^2} dx dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (6x^2 - 2y^2 - 9 + x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D_{xy}} (7x^2 - y^2 - 9) dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 3 \\ J = \rho \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (7\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi - 9) \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (8\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 9) \rho d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left( 8\cos^2\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^4}{4} - 9 \cdot \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^3 d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left( 162 \cos^2\varphi - \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( 162 \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \frac{243}{4} \right) d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left( 81 + 81 \cos 2\varphi - \frac{243}{4} \right) d\varphi = \frac{81\pi}{2} \text{ келип чыгат. } D_{xy} \text{ деп } G_2 \text{ бетин } xOy \\
&\text{тегиздигиндеги проекциясы болгон } x^2 + y^2 \leq 9 \text{ тегереги алынган.}
\end{aligned}$$

Демек,  $A = A_1 + A_2 = \frac{81\pi}{2}$ .

2) Остроградскийдин формуласы менен эсептеп көрөлү.

$\vec{F} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$  болгондуктан,

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 - 1 - 1 = 1$  келип чыгып,

$$A = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_V dv = \left[ \begin{array}{l} \text{цил. коорд. } x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, z = z, \\ dv = \rho d\rho d\varphi dz, \\ G \text{ бетинде } z = 9 - \rho \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{9-\rho} dz = 2\pi \left( 9 \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{2}$$

жогорудагыдай эле жоопту алабыз. ◀

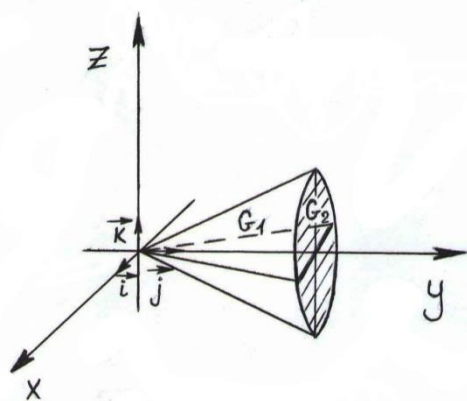
16)  $x^2 + z^2 = y^2 \quad (0 \leq y \leq 1)$

бети аркылуу өткөн

$\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$

векторун агымын тапкыла.

► Берилген бет, чокусу координата башталмасы, огу  $Oy$  болгон конустун бетин түзөт. Конустун негизин,  $y = 1$  тегиздигин  $G_2$  кыркындысы менен бүтөп, вектордук агымды  $G_1$  —



16.22-чийме

конустун каптал бети жана  $G_2$  кыркындысы (конустун негизи) аркылуу өткөн  $A_1$  жана  $A_2$  агымдарын суммасы (16.22 – чийме)

$$A = A_1 + A_2 = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

катарында аныктайбыз. Мында  $V$  деп, конустун  $G_1, G_2$  беттери менен чектелген бөлүгү алынат. Биздин учурда  $P = y^2 + z^2$ ,

$Q = -y^2, R = 2yz$  болуп,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 - 2y + 2y = 0$  келип чыккандыктан, эки  $A_1, A_2$  агымдар өз ара карама – каршы  $A_1 = -A_2$  болушат деген пикирге келебиз.

$$A_2 = \iint_{G_2} (\vec{F}, \vec{n}_2^0) d\sigma = \left| \begin{array}{l} y = 1 \text{ тегиз.} \\ \text{бирд. нор.} \\ \vec{n}_2^0 = \vec{j} \end{array} \right| = \iint_{G_2} (-y^2) d\sigma = \left[ \begin{array}{l} G_2 \text{ де} \\ y = 1 \\ \text{болот} \end{array} \right] = - \iint_{G_2} d\sigma =$$

$= -\pi r^2|_{r=1} = -\pi(1)^2 = -\pi$  болуп, конустун бетинен өткөн вектордун агымы  $A_1 = -A_2 = \pi$  көрүнүштө табылат. ◀

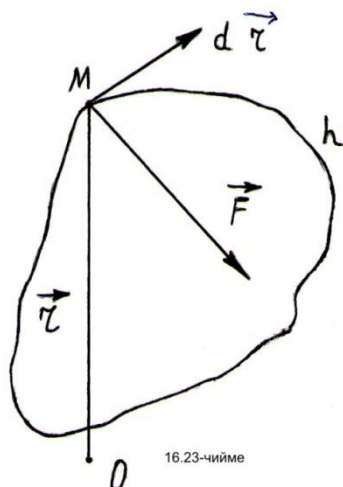
### 16.6.5 Вектордук талаанын циркуляциясы. Вектордун ротору. Стокстун формуласы

Айталы, үч өлчөмдүү  $Oxuz$  координаттык мейкиндигин, кайсы бир кубдаштырылуучу  $V$  областында (бөлүгүндө), үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вектордук талаасы (вектор – функциясы) берилсин. Эгерде белгилүү бир багыттагы  $L$  ийриси,  $V$  областында толугу менен кармалган каалагандай туюк формадагы ийри болсо, анда  $\vec{F}$  векторун  $L$  туюк формадагы ийри боюнча циркуляциясы деп,

$$\Omega = \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (56)$$

II – түрдөгү ийри сызыктуу интегралын маанисин айтабыз  $((x; y; z) \in L)$ . Мында  $(\vec{F}, d\vec{r})$  – векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү, ал эми  $d\vec{r}$  вектору – узундугу  $L$  ийрисин жаасынын дифференциалына барабар, багыты  $L$  ийрисинде тандалган багытка карата жүргүзүлгөн жаныманын багытына дал келген вектор (16.23 – чийме).



Айталы,  $V$  областында берилген

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

векторун талаасы:  $P, Q, R$  координаталары бардык жекече туундулары менен кошо үзгүлтүксүз

вектор – функция болсун.  $\vec{F}(x, y, z)$  векторун ротору деп,  $rot\vec{F}$  символу менен белгиленип

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \vec{k}, \quad (57)$$

көрүнүштө жазылган векторду айтабыз (2 – бөлүк, § 10.5).

(57) туюнтманы эстеп калууну жеңилдетүү үчүн, роторду

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad (58)$$

3 – тартиптеги аныктагыч катарында жазуу ыңгайлуу.

Мисалдар. 17)  $\vec{a} = -\frac{y^2}{2}\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$  векторун роторун тапкыла.

► (58) формуласын колдонуп,

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y^2}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (x + y)\vec{k} \quad \text{ээ}$$

болобуз. ◀

18)  $\vec{F} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$  вектордук талаасын  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  эллипсин бойлогон циркуляциясын тапкыла.

► Циркуляциянын формуласы боюнча

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \oint_L (-y^3) dx + x^3 dy + 0 \cdot dz = \left| \begin{array}{l} x = a \cos t, y = b \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \\ dx = -a \sin t dt, \\ dy = b \cos t dt \end{array} \right| = \\ &= ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^4 t + a^2 \cos^4 t) dt = \frac{3\pi ab}{4} \cdot (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

табылат. ◀

Эгерде кандайдыр бир  $V$  областында  $\text{rot}\vec{F} = \mathbf{0}$  болсо, анда  $V$  областында  $\vec{F}$  векторун агымын, вихрсиз (куюнсуз) деп айтышат.

$V$  областында кармалган бөлүкчө – жылмакай, б.а. ар бир чекитинде жаныма тегиздик жүргүзүү мүмкүн болгон  $G$  бети берилсин. Ал эми  $L$  контуру деп,  $G$  бетин чек ара сызыгы болгон туюк формадагы ийрини, ал эми  $D$  жалпак областы деп,  $G$  бетин  $xOy$  тегиздигиндеги проекциясын белгилейли.

Ушундай шарттарда берилген вектордук талаанын ротору менен анын циркуляциясын байланыштырган **Стокстун формуласы** деп аталуучу:

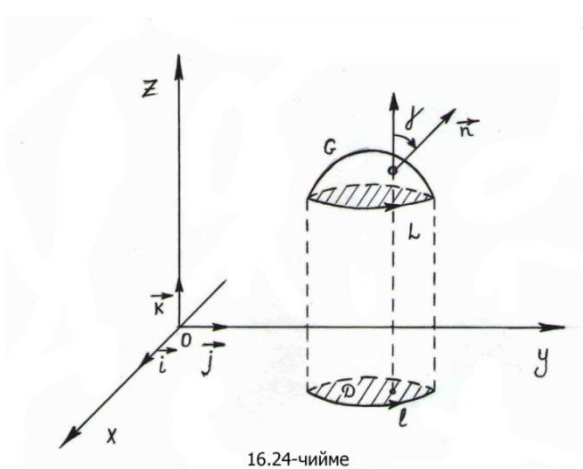
$$\iint_G (\text{rot}\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) \quad \text{же} \quad (59)$$

$$\iint_G \text{rot}_{\vec{n}}\vec{F} d\sigma = \oint_L Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz + P(x, y, z) dx$$

формулалары орун алат. Стокстун (59) формуласы:  $G$  бетинен, анын  $\vec{n}$  нормалына карата тандалган багыт боюнча өткөн  $\vec{F}$  вектордук талаасын агымы,  $\vec{F}$  векторун  $G$  бетинин  $L$  туюк чек ара сызыгы (контур) боюнча циркуляциясына барабар экендигин көрсөтөт.

Стокстун формуласын далилдейли:

► Каралган учурда,  $G$  бетине жүргүзүлгөн  $\vec{n}$  нормалы менен  $Oz$  огунун



арасындагы  $\gamma$  – тар бурч деп алынып, туюк  $L$  контуру боюнча алынган ийри сызыктуу интегралдын багыты,  $L$  чек ара сызыгын «бойлоп басканда»  $G$  бети дайыма оң жакта кала бергендей (оң багыт) абалда макулдашылат. Ошондой эле,  $D$  жалпак областын контуру болгон  $l$  ийрисииндеги багыт да,  $L$

контурундагы багытка шайкеш оң болот деп эсептелет.  $D$  областынан башталган  $Oz$  огуна параллель түздөр,  $G$  бети менен бир гана чекитте кесилишсин, б.а.  $G$  бети  $z = f(x, y)$  функциясы менен бир маанилүү аныкталсын, деген шарттарды коёлу (16.24 – чийме).

Анда  $G$  бетинде жайгашкан  $(x; y; z)$  чекитинен бетке жүргүзүлгөн  $\vec{n}$  нормалы  $\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} - \vec{k} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right\}$  координаталары менен берилип (2 – бөлүк, § 10.6, (10.34) – формуласы), узундугу

$|\vec{n}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$  болору белгилүү.  $\vec{n}$  нормалы менен  $Ox$  огу  $\alpha = \widehat{\vec{i}, \vec{n}}$ ;  $Oy$  огу  $\beta = \widehat{\vec{j}, \vec{n}}$ ;  $Oz$  огу  $\gamma = \widehat{\vec{k}, \vec{n}}$  бурчтарын түзүшсүн. Бул учурда нормалдын багыттоочу косинустары :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_x}{|\vec{n}|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{n}_y}{|\vec{n}|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{n}_z}{|\vec{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

көрүнүштөрдө табылышат. Мында  $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$  – нормаль вектордун тиешелүү координаттык октордогу проекциялары же координаталары. Багыттоочу косинустардын үчүнчүсүн «- 1» ге теңдеп, алгачкы экөөсүн

«- 1» ге көбөйтүп, ордуна үчүнчүсүнөн табылган «- 1» дин маанисин коюп,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \gamma = -\cos \alpha \text{ жана } \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \gamma = -\cos \beta \quad (60)$$

теңдештиктерине ээ болобуз.

Айталы,  $P(x, y, z)$  функциясы  $V$  областында, анын ичинде  $G$  бетинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болсун. Туюк  $L$  ийриси боюнча  $P(x, y, z)$  функциясынан алынган

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, f(x, y)) dx \quad (61)$$

$\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралын карайлы. Эки өзгөрүлмөлүү  $P(x, y)$  функциясы үчүн жазылган Гриндин жеке учурдагы

$$\oint_l P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

формуласын,  $P(x, y, z) = P(x, y, f(x, y))$  – татаал функциясына колдонуп, (61) ийри сызыктуу интегралды

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, f(x, y)) dx = - \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dS \quad (62)$$

көрүнүшкө өзгөртөбүз.  $\gamma$  – тар бурч болгондо (16.6.3, (\*), (\*\*)) – формулалары),  $G$  бетин  $\Delta\sigma_i$  – бөлүкчө элементин  $xOy$  тегиздигиндеги проекциясынын  $\Delta S_i$  – аянты,  $\Delta S_i = \cos \gamma_i \cdot \Delta\sigma_i$  көрүнүштө эсептелерин эске алып, (62) формуланы

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma$$

көрүнүштө жазууга болот. (60) формулаларын пайдаланып, акыркы теңдештикти



$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= \iint_G \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \gamma \right) d\sigma = \\ &= \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos \gamma \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (63)$$

көрүнүшкө, кайра көчүрүп жазалы.

Ушундай эле ыкма менен

$$\oint_L Q(x, y, z) dy, \quad \oint_L R(x, y, z) dz$$

интегралдарын эсептеп,

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \cos \alpha \right) d\sigma \quad (64)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_G \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \cos \beta \right) d\sigma \quad (65)$$

формулаларына ээ болобуз.

(63), (64), (65) формулаларын мүчөлөп кошуп:

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \iint_G \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma \right] d\sigma \end{aligned} \quad (66)$$

Стокстун скалярдык формада жазылган формуласын келтирип чыгарабыз. Аны вектордук формада

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint_G (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\sigma$$

(59) көрүнүштө жазууга да болот. ◀

### Көнүгүүлөр

1. I – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдарды эсептегиле.

а)  $\int_L \frac{ds}{x+y}$ , мында  $L: y = x + 2$  түзүнүн  $(2; 4)$  жана  $(1; 3)$  чекиттерин

туташтырган кесинди;

б)  $\int_L x^2 ds$ , мында  $L: x^2 + y^2 = a^2$  айланасын жогорку жарым

жаасы;

в)  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , мында  $L: x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$

ийриси  $(0 \leq t \leq 2\pi)$ .

г)  $\int_L (x+y) ds$ , мында  $L: \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$  лемнискаттын

оң таажысы.

2. Ийри сызыктуу интегралдардын жардамы менен төмөн жагынан  $xOy$  тегиздиги, жогору жагынан көрсөтүлгөн беттер менен чектелген төмөндөгү цилиндрдик беттердин аянттарын эсептегиле:

а)  $y^2 = 2x, z = \sqrt{2x - 4x^2}$ ;      б)  $x^2 + y^2 = R^2, z = \frac{xy}{R}$ .

3. а) Жаанын сызыктуу тыгыздыгы  $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$  болсо,

$y = \frac{x^2}{2}$  параболасын  $(1; \frac{1}{2})$  менен  $(2; 2)$  чекиттерин арасындагы жаасын массасын тапкыла.

б)  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t - t \end{cases}$  ийрисин,  $t = 0, t = 1$  аралыгындагы жаасын массасын тапкыла. Ийринин сызыктуу тыгыздыгы  $\rho(x, y) = \frac{y}{e^x}$  болсо.

4. Экинчи түрдөгү ийри сызыктуу интегралдарды эсептегиле.

а)  $\int_L xy \, dx$ , мында  $L: y = \sin x$  синусоидасын  $x = 0$  чекитинен

$x = \pi$  чекитине чейинки жаасы;

б)  $\int_L (x^2 - y^2) \, dx$ , мында  $L: y = x^2$  параболасын  $(0; 0)$  чекитинен

$(2; 4)$  чекитине чейинки жаасы;

в)  $\int_L (x^2 - y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$ , мында  $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  эллипси

(оң багыт алынат).

5. Төмөндөгү интегралдардын интегралдоо жолунан көз каранды эместигин текшерип, андан кийин эсептегиле:

а)  $\int_{(-1; 2)}^{(2; 3)} x \, dy + y \, dy$ ; б)  $\int_{(0; 1)}^{(1; 2)} \frac{2x}{y^3} \, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \, dy$ .

6. Төмөндөгү туюнтмалардын, кайсы бир эки өзгөрүлмөлүү функциялардын толук дифференциалы болорун текшерип, функциялардын өздөрүн тапкыла.

а)  $(x^2 + 2xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy - y^2) \, dy$ ;

б)  $(3x^2 - 2xy - y^2) \, dx - (x^2 + 2xy + 3y^2) \, dy$ ;

в)  $(e^{2y} - 5y^3 e^x) \, dx + (2x e^{2y} - 15y^2 e^x) \, dy$ .

7. Төмөндөгү ийри сызыктуу интегралдарды Грин – Остроградскийдин формуласын пайдаланып, кош интегралдарга өзгөртүп жазгыла:

$$а) \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy ;$$

$$б) \int_L \frac{\ln x}{x} y^2 dx + (x^2 \ln y + \ln^2 x) dy .$$

8. Ийри сызыктуу интегралдарды Грин – Остроградскийдин формуласы менен эсепгиле.

$$а) \int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy , \text{ мында } L: \text{ чокулары } A(1; 1), B(3; 2),$$

$C(2; 5)$  болгон үч бурчтуктун оң багытта алынган контуру;

$$б) \int_L (y - x^2) dx + (x + y^2) dy , \text{ мында } L: \text{ радиусу } R \text{ болгон тегеректин}$$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  секторун контуру.

9. I – түрдөгү беттик кош интегралдарды эсептегиле.

$$а) \iint_G (x^2 + y^2) d\sigma , \text{ мында } G: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ сферасы;}$$

$$б) \iint_G z d\sigma , \text{ мында } G: x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq H \text{ конусун каптал}$$

бетин бөлүгү.

$$в) \iint_G (x + y) d\sigma , \text{ мында } G: x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

тегиздигин бөлүгү.

10.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  сферасын бети аркылуу өткөн  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  вектордук талаанын агымын тапкыла.

11.  $\vec{a} = r \vec{r}$  векторун дивергенциясын тапкыла, мында  $\vec{r} = \{x; y; z\}$ .

12.  $\vec{a} = \{x^2; y^2; z^2\}$  векторун дивергенциясын тапкыла.

13.  $u = x^2 + y^2 + z^2$  болсо  $div(grad u)$  тапкыла.

14. Берилген векторлордун роторун эсептегиле:

а)  $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ; б)  $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$ ; в)  $\vec{a} = \vec{r}$ .

15. Гаусс – Остроградскийдин формуласы боюнча төмөндөгү беттик интегралды эсептегиле:

$$\iint_G x dydz + y dx dz + z dx dy \text{ Мында } G : x = 0, y = 0, z = 0,$$

$x + y + z = 1$  тегиздиктери менен чектелген пирамиданын сырткы бети.

16.  $rot(grad u)$  ну эсептегиле: а)  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ;

б)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; в)  $u = \frac{1}{r}$ , мында  $r = |\vec{r}|$ .

17.  $div(rot \vec{a})$  ны эсептегиле:

а)  $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$ ; б)  $\vec{a} = r \vec{r}$ ; в)  $\vec{a} = \vec{r}$

Жооптор: 1. А)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2$ ; б)  $\frac{\pi a^3}{2}$ ; в)  $\frac{a^2}{3} [(1 + 4\pi^2)^{\frac{1}{3}} - 1]$ ;

г)  $\frac{1}{54} (56\sqrt{7} - 1)$ .

2. а)  $\frac{\pi}{4}$ ; б)  $R^2$ . 3. а)  $\frac{\sqrt{125} - \sqrt{8}}{6}$ ; б)  $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}$ .

4. а)  $\pi$ ; б)  $-\frac{56}{15}$ ; в)  $+2\pi$ . 5. а) 8; б)  $\frac{5}{8}$ .

6. а)  $F(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$ ;

б)  $F(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$ ;

в)  $F(x, y) = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$ .

$$7. \text{ a) } \iint_G y^2 dx dy; \quad \text{б) } \frac{1}{2} \iint_G x \ln y dx dy;$$

$$8. \text{ a) } -46\frac{2}{3}; \quad \text{б) } \frac{2}{3}.$$

## XVII - ГЛАВА. КОМПЛЕКСТИК ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАР

### § 17.1 Комплекстик тегиздиктеги областтар жана функциялар

#### 17.1.1 Комплекстик сандардын көптүгү

Комплекстик сан моделдерин аныктамасы жана алар менен болгон амалдар жөнүндөгү баштапкы маалыматтар 1 – бөлүктө (§ 1.4) берилген. Ошондуктан, айрым негизги делген билгилерди бышыктоо иретинде кайталоо менен, комплекстик сандар аппаратын чөйрө таануу процессиндеги колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүү жолдорун иликтейбиз.

Айталы, декарттык  $Oxy$  координаттык тегиздигинде  $(x; y)$  координаталары менен берилген чекиттердин баарында,  $z = x + iy$  көрүнүштө жазылышкан комплекстик сандар жайгашсын дейли. Мында  $\forall x, y \in R$ , ал эми  $i$  – жалган бирдик деп аталып,  $i^2 = -1$  шартына баш ийет.  $x$  – комплекстик сандын чыныгы бөлүгү, ал эми  $y$  – жалган бөлүгү деп аталышып, *французча* – *reele, imaginaire* деген сөздөрдөн кыскартылып алынган  $x = Re z$ ,  $y = Im z$  символдору менен белгиленишет. Бул учурда координаттык тегиздик  $z$  – комплекстик тегиздиги (кээде комплекстик талаа) деп айтылат. Ал эми бардык комплекстик сандардын көптүгүн  $C$  тамгасы менен белгилейбиз.

1 – бөлүктүн 1.4.2 – аныктамасында (§ 1.4) киргизилген комплекстик сандын нормасы же модулу деп аталган

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \in R \quad (1)$$

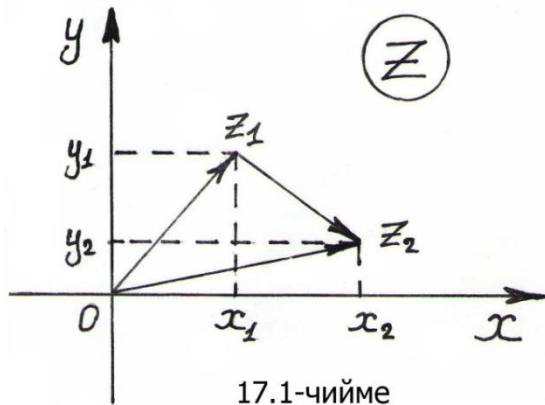
ченөө эрежесине таянып, комплекстик сандарды бири – биринен айырмалап таанып, тартиптештирип, кайсы бир кубулуштардын бир маанилүү математикалык моделдерин түзүүдө чен каражаты катары колдоно алабыз.

Ошентип комплекстик сандар менен ченелүүчү чоңдуктар,  $O$  координата башталмасына карата салыштырылып, анын чоңдугу өзү жайгашкан чекиттен координата башталмасына чейинки (1) аралыгы (модулу) менен ченелет. Ал эми каалагандай эки  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,

$z_2 = x_2 + iy_2$  комплекстик сандарын арасындагы аралыкты, алардын айырмасынын  $\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$  нормасы (модулу) катарында аныктап, аны  $\overrightarrow{z_1 z_2} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1}$  векторун узундугу болгон

$$\rho(z_1, z_2) = |\overrightarrow{z_1 z_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

чыныгы сан деп түшүнөбүз (17.1 – чийме). Демек, комплекстик сандар



менен моделдештирилген кубулуштарды толук баалап, ченеп үйрөнүү үчүн, (1), (2) эрежелерине шилтеме жасап, алардын чыныгы сандардын көптүгүнө тиешелеш коюлган (чагылтылган) элестери боюнча баалап, салыштырабыз. Аралыкты ченөөнүн (2) эрежеси, 1 – бөлүктүн 1.2.1 – темасында баяндалган

$R^2$  мейкиндигиндеги метрика менен дал келип, метрикага коюлган

- I.  $\rho(z_1, z_2) = 0$  эгерде  $z_1 = z_2$  дал келишсе;
- II.  $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$  симметриялуулук аксиомасын;
- III.  $\rho(z_1, z_3) < \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$  үч бурчтук аксиомасын

талаптарын бардыгын канааттандырат. Ошондуктан  $z$  – комплекстик талаасы, (2) аралык эрежесине карата түзүлгөн толук метрикалык мейкиндик болот.

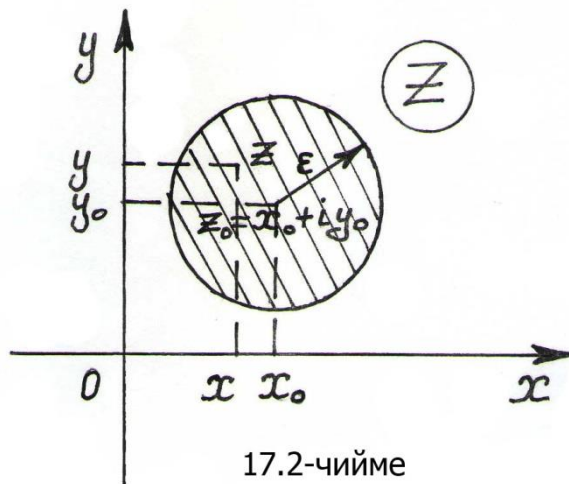
$z$  – талаасынан эркин абалда алынган  $z_0 = x_0 + iy_0$  чекитин (комплекстик санын)  $\varepsilon$  – чеке белин (аймакчасын) түзөлү. Ал үчүн эркин абалда жетишерлик кичине болгон  $\varepsilon$  санын ( $\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$ ) алып,  $z_0$  комплекстик санынан  $\varepsilon$  аралыгынан алыс эмес жйгашкан бардык  $z$  комплекстик сандарынан турган аймакчаны, аралыктарды ченөөнүн (1), (2) эрежелерин негизинде

$$\rho(z_0, z) = |z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \quad (3)$$



көрүнүштө жаза алабыз. Акыркы барабарсыздыктын эки жагын тең квадратка көтөрүп,  $z_0$  комплекстик санын  $\varepsilon$  –чеке белин комплекстик тегиздикте: борбору  $(x_0; y_0)$  – чекити, радиусу–  $\varepsilon$  саны болгон

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$  тегеректин ички чекиттери деп элестетсек болот (17.2 – чийме). Ошентип (3) шартын канааттандырган  $z$  комплекстик сандарын көптүгү  $z_0$  дун  $\varepsilon$  –чеке бели болуп, чек ара чекиттерин кармабаган ачык көптүк катарында кабыл алынат.



Комплекстик тегиздикте комплекстик сандардын кайсы бир  $D$  көптүгү берилсин дейли. Эгерде  $\forall z \in D$  чекитин жок дегенде бир

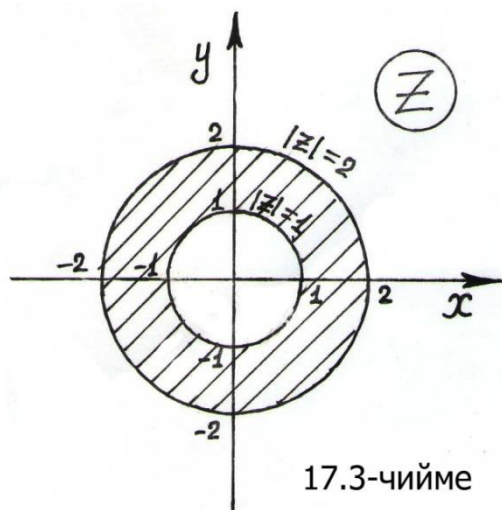
$\varepsilon$  –чеке бели жашап, ал толугу менен  $D$  көптүгүндө кармалып турса, анда  $z$  комплекстик санын  $D$  көптүгүн ички чекити деп айтабыз. Ал эми  $z$  чекитин каалагандай  $\varepsilon$  –чеке белдеринде  $D$  көптүгүн элементтери менен кошо, башка көптүктөрдүн элементтери да кармалып турса, анда  $z$  комплекстик санын  $D$  көптүгүн чек ара чекити деп атап,  $D$  көптүгүн бардык чек ара чекиттерин көптүгүн  $\partial D$  деп белгилейбиз.

**17.1 Аныктама.** Эгерде: 1)  $D$  көптүгүн бардык чекиттери ички чекиттер болушса;

2)  $D$  көптүгүн каалагандай чекиттерин,  $D$  көптүгүндө кармалган чекиттер аркылуу өтүүчү туташ – сынык сызыктар аркылуу байланыштыруу мүмкүн болсо;

Анда комплекстик сандардын  $D$  көптүгүн, комплекстик тегиздикте берилген область деп айтабыз.  $D$  областы менен анын чек ара чекиттерин  $\partial D$  – көптүгүн биригүүсүн туюк (жабык) область деп,  $\bar{D}$  – символу менен белгилейбиз ( $\bar{D} = D \cup \partial D$ ). Ал эми  $D$  областында толугу менен кармалып турган, каалагандай туюк формадагы контурдун ичинде чектелген көптүктүн бардык элементтери да  $D$  областына таандык болушса, анда  $D$  областын бир байламталуу область дейбиз.

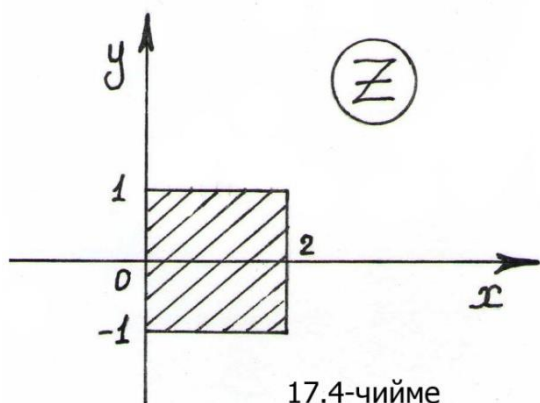
Мисалы: 1)  $1 < |z| < 2$  шартына баш ийген  $z$  комплекстик сандардын көптүгү, комплекстик тегиздикте берилген ачык область болот (17.3 – чийме). Ал эми  $1 \leq |z| \leq 2$  көптүгү туюк область болуп, анын чек ара чекиттери борбору  $O$  чекити, радиустары  $2$ ,  $1$  сандарына барабар айланалардын чекиттери болушат



17.3-чийме

$$\partial D = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 2, |z| = 1\}.$$

2)  $0 < x < 2, -1 < y < 1$  шарттары аркылуу аныкталган



17.4-чийме

$z = x + iy$  комплекстик сандардын көптүгү,  $z$  – комплекстик тегиздигинде бир байламталуу областты түзөт (17.4 – чийме). Ал эми  $0 < |z| < 2$  шартына баш ийген комплекстик сандардын көптүгү бир байламталуу область боло албайт. Анткени 17.5 – чиймеде

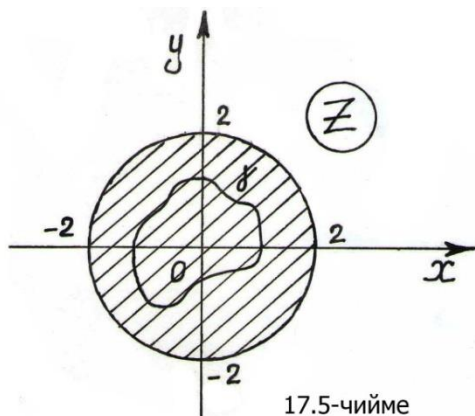
көрсөтүлгөндөй абалда тандалган туюк формадагы  $\gamma$  – ийрисин (контурун) ичинде кармалган  $z = 0$  чекити, берилген областка таандык эмес. Берилген область эки байламталуу болот.

Мындан ары, атайын эскертүүсүз комплекстик тегиздикте каралуучу бардык областтарды бир байламталуу деп эсептейбиз.

### Мисалдар

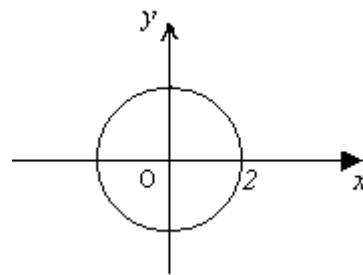
Комплекстик тегиздикте берилген төмөндөгү ийри сызыктардын жана областтардын геометриялык сүрөттөлүштөрүн тургузгула.

1)  $|z| = 2$  – ийрисин.



17.5-чийме

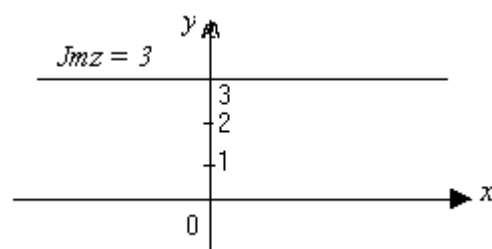
►  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  болорун билебиз. Ошондуктан ийринин теңдемесин  $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$  же  $x^2 + y^2 = 4$  көрүнүштө жазып, анын борбору координата системасын башталыш чекити болгон, ал эми радиусу 2 ге барабар болгон айлананын теңдемеси экендигине ишенип, графикте көрсөтөбүз (17.6 – чийме). ◀



17.6 – чийме

2)  $\text{Im } z = 3$  ийрисин.

► Комплекстик сандардын аныктамасын негизинде  $\text{Im } z = y$ , анда  $y = 3$  теңдештиги келип чыгат. Бул болсо,  $Ox$  огуна параллель болгон бир түз сызыктын теңдемеси (17.7 – чийме) болот. ◀

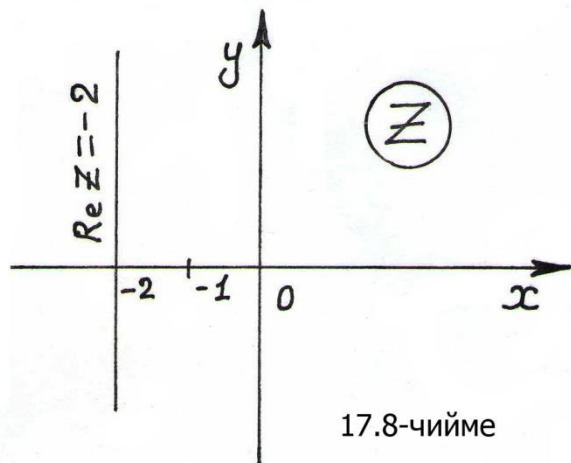


17.7 – чийме

3)  $\text{Re } z = -2$  ийрисин.

►  $\text{Re } z = x$  болгондуктан  $x = -2$  болот. Бул болсо  $Oy$  огуна параллель болгон бир түз

сызыктын теңдемеси болот (17.8 – чийме).



17.8-чийме

4)  $\text{Im } z^2 = 2$  ийрисин.

►  $z = x + iy$  болгондуктан

$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$  келип чыгып, берилген ийри  $\text{Im } z^2 = 2xy$  теңдештиги менен берилерин көрөбүз.

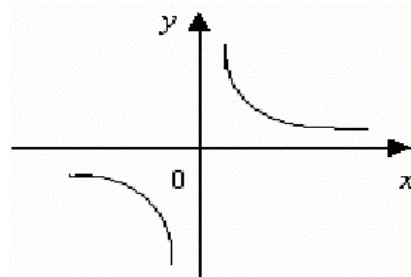
Мындан  $2xy = 2$  же  $y = \frac{1}{x}$  бир

гиперболанын теңдемесин же көз

карандылык байланыш – эрежеси болгон функцияны алабыз. (17.9 – чийме). ◀

5)  $\arg z = \frac{2\pi}{3}$  ийрисин.

17.9 – чийме

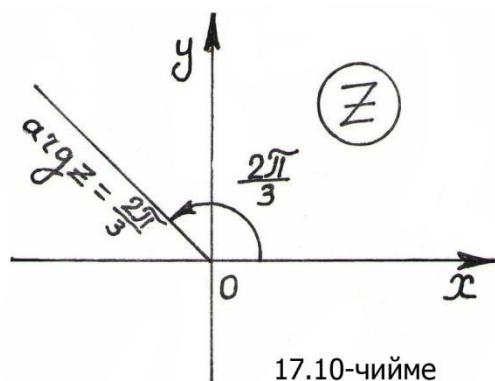


► Комплекстик сандын аргументинин

аныктамасын негизинде  $\varphi = \arg z = \frac{2\pi}{3}$  болот. Демек, биз издеген

көптүктүн ар кандай чекити  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  шооласында жатат

(17.10 – чийме). ◀

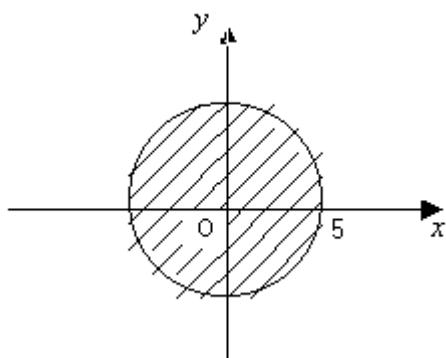


17.10-чийме

Төмөндөгү барабарсыздыктардын жардамы менен берилген чекиттердин көптүгүн аныктагыла жана анын тегиздиктеги сүрөттөлүшүн сызгыла.

б)  $|z| < 5$  шартына баш ийген чекиттердин көптүгүн.

► Бул барабарсыздык аныктаган көптүктүн каалаган чекитинен координата башталышына чейинки аралык 5 тен кичине. Бул шартты канаттандырган

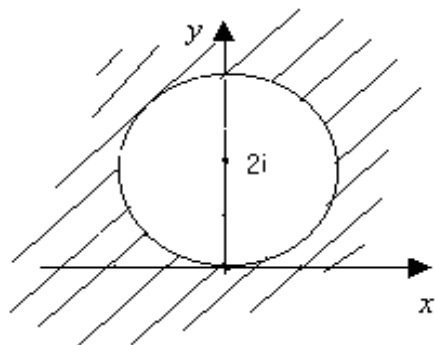


чекиттер радиусу 5 ке барабар, борбору координата башталышы болгон тегеректин ички чекиттери болот (четки чекиттери кирбейт) (17.11 – чийме). ◀

17.11 – чийме

7)  $|z - 2i| > 2$  көптүгүн.

►  $|z - 2i| > 2$  барабарсыздыгын канаттандырган  $z$  чекитинен  $z_0 = 2i$  чекитине чейинки аралык 2 ден



чоң. Ошол себептен, берилген барабарсыздыкты канаттандырган чекиттердин көптүгү, борбору  $z_0 = 2i$  жана радиусу 2 ге барабар болгон тегеректин сырткы чекиттеринен –

17.12 – чийме

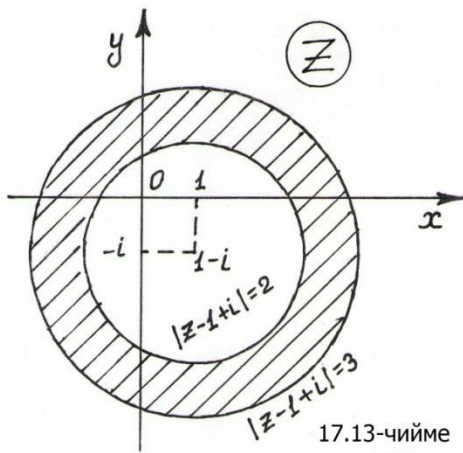
турат (17.12 – чийме).

8)  $2 \leq |z - i + 1| < 3$  көптүгүн.

► Бул барабарсыздыктарды канаттандырган чекиттердин көптүгү үчүн төмөнкү эки барабарсыздыктар аткарылат:

$$|z - 1 + i| \geq 2 \quad \text{жана} \quad |z - 1 + i| < 3.$$

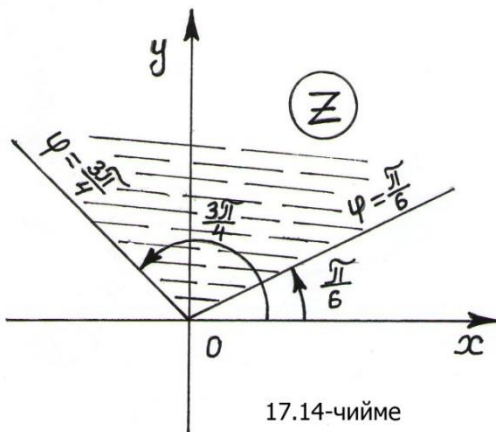
1 – барабарсыздык радиусу 2 ге барабар жана борбору  $z_0 = 1 - i$  чекити болгон тегеректин сырткы чекиттерин аныктайт, ал эми 2 – барабарсыздык радиусу 3 кө барабар жана борбору  $z_0 = 1 - i$  болгон тегеректин ички чекиттерин аныктайт (17.13 – чийме).



17.13-чийме

9)  $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$  барабарсыздыгын канааттандырган чекиттердин көптүгү, жактары  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  жана  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  болгон

бурчтун ичиндеги чекиттерден турат (17.14 – чийме).



17.14-чийме

10)  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$  көптүгүн.

► Бөлчөктүн алымына караганда бөлүмү чоң болгондо гана 1 ден кичине болорун эске алып, берилген барабарсыздыкты

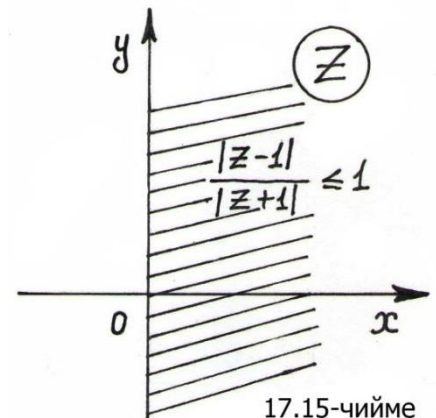
$|z-1| \leq |z+1|$  көрүнүшкө келтиребиз.

Мындан  $z = x + iy$ ,  $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ,

$|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$  болгондуктан, аны  $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$  барабарсыздыгына теңдеш өзгөртөбүз. Эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$(x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2$  топтоштурган соң  $-4x \leq 0$ ,

же  $x \geq 0$  барабарсыздыгын алабыз. Бул болсо, координаталар системасын оң жарым тегиздигин чекиттери болот (17.15 – чийме).



17.15-чийме

## 1 – КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү барабарсыздыктар менен аныкталган чекиттердин көптүгүн комплекстик тегиздиктеги сүрөттөлүшүн чийгиле:



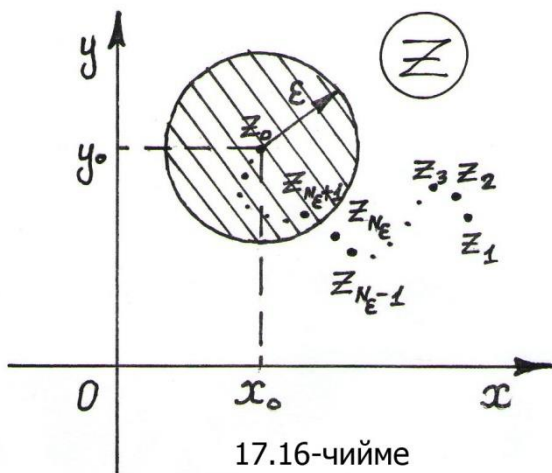
- 1)  $0 \leq \text{Im}z \leq 1$ ;                      2)  $1 \leq |z + 2 + i| < 2$ ;  
 3)  $4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8$ ;            4)  $\text{Im} z^2 \geq 2$ ;  
 5)  $\text{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$ ;                      6)  $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ ;  
 7)  $\begin{cases} z \cdot \bar{z} < 3 \\ \text{Re} z > 1; \end{cases}$                       8)  $\begin{cases} |z| < 2 \\ |z - 2i| \leq 2; \end{cases}$                       9)  $\begin{cases} -1 \leq \text{Im}z \leq 0 \\ 0 \leq \text{Re} z \leq 2. \end{cases}$

### 17.1.2 Комплекстик сандардын удаалаштыгы

Айталы,  $z$  – комплекстик тегиздигинде

$$z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n, \dots \quad (4)$$

комплекстик сандардын чексиз удаалаштыгы берилсин. Анда анын пределин табуу амалы, (2) аралык эрежеси менен ченелген жакындашуу мерчемин баалоо аркылуу ишке ашырылат. Эгерде (4) удаалаштыгы чектүү  $z_0$  комплекстик санына жыйналса, анда алдын ала эркин абалда тандалган, жетишерлик кичине  $\varepsilon > 0$  санына жараша кандайдыр бир  $N_\varepsilon$  номери табылып, ушул  $N_\varepsilon$  номеринен чоң ( $n > N_\varepsilon$ )



номерлер менен белгиленген удаалаштыктын бардык мүчөлөрү

$$\rho(z_0, z_n) = |z_n - z_0| < \varepsilon \text{ шартына баш ийишет. Бул учурда}$$

удаалаштыктын чектүү сандагы  $N_\varepsilon$  мүчөлөрү гана  $z_0$  комплекстик санынан  $\varepsilon$  аралыгынан узак, ал эми калган чексиз көп

$z_{n=N_\varepsilon+1}, z_{n+1}, z_{n+2}, \dots$  мүчөлөрү  $\varepsilon$  аралыгынан жакын, же  $z_0$  дун  $\varepsilon$  –чеке белин ичинде жайгашкан болушат (17.16 – чийме).

Комплекстик тегиздикте ар бир  $z_n = x_n + iy_n$  комплекстик саны, координаталары  $(x_n; y_n)$  болгон чекит катары сүрөттөлгөндүктөн, (4) удаалаштыгын  $(x_0; y_0)$  координаталуу  $z_0 = x_0 + iy_0$  чекитине умтулуу

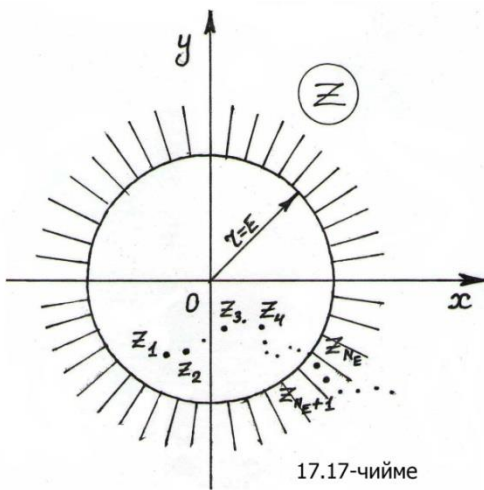
процессин, удаалаштыктын мүчөлөрүн чын бөлүктөрү, пределдик чекиттин чын бөлүгүнө, ал эми жалган бөлүктөрү жалган бөлүгүнө умтулат деп түшүнөбүз:

$$\{z_n\} \rightarrow z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \{x_n\} \rightarrow \{x_0\} \\ \{y_n\} \rightarrow \{y_0\} \end{cases} \text{ же}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0. \end{cases} \quad (5)$$

Модулу чектүү сан болгон комплекстик санды чектүү комплекстик сан дейбиз. Эгерде кандай гана жетишерлик чоң  $E$  санын алсак да, ага жараша  $N_E$  номери табылып, ушул номерден чоң ( $n > N_E$ ) номерлер менен белгиленген (4) удаалаштыгын бардык  $z_n$  мүчөлөрүн модулдары  $E$  санынан да чоң  $|z_n| > E$  болсо, анда  $\{z_n\}$  удаалаштыгын комплекстик тегиздиктин четки кыйырындагы чексиз алыстатылган чекитке же жөн эле чексизге умтулат деп,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  көрүнүштө жазабыз. Бул учурда

(4) удаалаштыгын чектүү сандагы  $N_E$  мүчөлөрү гана борбору  $O$  чекитинде, радиусу  $r = E$  болгон тегеректин ичинде, ал эми  $n = N_{E+1}$  номери менен белгиленген мүчөсүнөн кийинки калган чексиз көп мүчөлөрүн баары тегеректин сыртында жайгашкан болушат (17.17 – чийме).



Комплекстик тегиздикти чексиз алыстатылган  $z = \infty$  комплекстик чекиттери менен толуктагандан кийин, *кеңейтилген* комплекстик өзгөрүлмөлүү

тегиздикке ээ болобуз. Чексиз алыстатылган  $z = \infty$  чекитин  $E$  – чеке бели (аймакчасы) деп, борбору  $O$  чекитинде, радиусу  $r = E$  болгон тегеректин сырткы чекиттерин түшүнөбүз.

Ошентип, комплекстик сандардын (чекиттердин) тегиздигинде область, чеке бел (аймакча), удаалаштык, предел сыяктуу түшүнүктөр, 1 – бөлүктө (§ 1.2, 1.2.2 – темасы) баяндалган  $R^2$  тегиздигиндеги түшүнүктөрдү кайталап, аларга тиешелүү бардык касиеттерге баш ийишет. Анткени, экөөсүн тең түзүлүү табыяттары окшош же алар бир

эле тегиздикте, бирдей ченөө эрежелерине баш ийген чекиттерден куралышкан.

### 17.1.3 Комплекстик өзгөрүлмөлүү функция

Айталы,  $z$  – комплекстик тегиздигинде элементтери  $z = x + iy$  көрүнүштө ( $x, y \in R$ ) жазылган  $D$  көптүгү, ал эми  $w$  – комплекстик тегиздигинде элементтери  $w = u + iv$  көрүнүштө ( $u, v \in R$ ) жазылган  $W$  көптүгү берилсин.

**17.2 Аныктама.** *Ар бир  $z \in D$  комплекстик чекитине кандайдыр бир  $f$  эрежесин негизинде бир же бирден көп  $w = f(z)$  маанилери туура келсе, анда  $D$  областында аныкталган комплекстик өзгөрүлмөлүү*

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

*функциясы берилди деп айтабыз. Мында  $u(x, y)$  жана  $v(x, y)$  эки өзгөрүлмөлүү чыныгы функциялар, тиешелүү түрдө  $f(z)$  функциясын чыныгы (Reel) жана жалган (Im) бөлүктөрү деп аталышат.*

*Ар башка  $z \in D$  чекиттерине,  $W$  көптүгүнөн ар башка  $w = f(z)$  маанилери туура келсе, анда  $f(z)$  функциясын **бир беттүү же бир маанилүү функция**, ал эми бир беттүү эмес болсо, **көп беттүү функция** дейбиз.*

*Эгерде ар бир  $z \in D$  чекиттерине  $W$  көптүгүнөн бир канча комплекстик сандар тиешелеш коюлуп калса, анда функция көп маанилүү деп аталат.*

Мисалы,  $w = z^2$  функциясы  $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy$  көрүнүштөгү эки өзгөрүлмөлүү  $u = x^2 - y^2$  – чыныгы жана

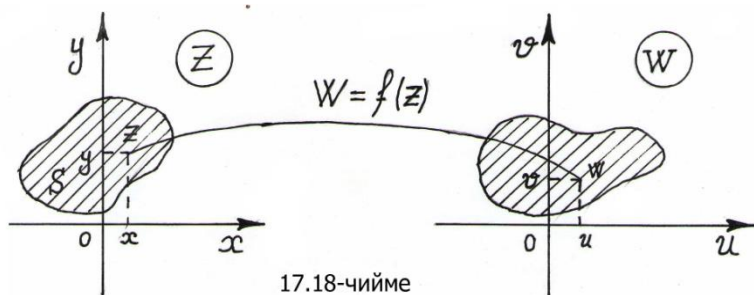
$v = 2xy$  – жалган бөлүктөрдөн турат. Ал  $Im z > 0$  жарым тегиздигинде же  $Ox$  огун жогору жагындагы чекиттерде бир маанилүү (бир беттүү) болгону менен, бүтүндөй тегиздикте кош маанилүү (эки беттүү) функция болот. Анткени  $i$  жана  $-i$  комплекстик сандарына бир эле  $-1$  саны туура келет  $i^2 = (-i)^2 = -1$ . Ал эми  $w = \sqrt{z}$  функциясы чексиз алыстатылган  $z = \infty$  жана нөлдүк  $z = 0$  чекиттеринен башка



бардык комплекстик тегиздикте эки маанилүү функция болот, анткени комплекстик сандан тамыр чыгаруу эрежеси (1 – бөлүк, § 1.4 , (11) формуласы) боюнча эки ( $k = 0, 1$ )

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\varphi+2\pi k}{2} + i \sin \frac{\varphi+2\pi k}{2} \right) \text{ маанилерге ээ болот.}$$

Ошентип комплекстик өзгөрүлмөлүү функцияны,  $z$  тегиздигиндеги



$D$  көптүгүн,  $w$  тегиздигиндеги кандайдыр бир  $W$  көптүгүнө чагылтуучу эреже – мыйзам катарында түшүнүүгө болот (17.18 –

чийме).

Комплекстик өзгөрүлмөлүү негизги элементардык функциялар төмөндөгү формулалар менен берилет:

1. (Экспонента) функциясы:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

2. Тригонометриялык функциялар:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

3. Гиперболалык функциялар:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

4. Логарифмалык функция:  $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

5. Көрсөткүчтүү функция:  $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ , мында  $a$  – каалаган турактуу комплекстик сан.

6. Даражалуу функция:  $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ , мында  $a$  – каалаган турактуу комплекстик сан.

Тригонометриялык жана гиперболалык функциялардын арасындагы кээ бир байланыштар төмөндөгү формулалар менен берилет:

$$1) \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$2) \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$3) \operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$4) \operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$5) \sin i z = i \operatorname{sh} z \qquad 6) \cos i z = \operatorname{ch} z$$

$$7) \sin i z = i \sin z \qquad 8) \operatorname{ch} i z = \cos z.$$

### Мисалдар

Төмөндөгү функциялардын берилген чекиттеги маанисин

эсептегиле: 1)  $e^z$  функциясын  $z = 3 + \frac{\pi}{2}i$  чекитиндеги маанисин

эсептегиле:

$$\blacktriangleright e^{3+\frac{\pi}{2}i} = e^3 e^{\frac{\pi}{2}i} = e^3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = e^3 (0 + i) = i e^3. \blacktriangleleft$$

2)  $\operatorname{Ln} z$  функциясын  $z = -1$  чекитиндеги маанисин тапкыла

$$\blacktriangleright \operatorname{Ln}(-1) = \ln |-1| + i (\arg(-1) + 2\pi k) = i (\pi + 2\pi k) = i\pi (1 + 2k). \blacktriangleleft$$

3)  $\sin z$  ти  $z = -5 - i$  чекитинде эсептегиле.

$$\blacktriangleright \sin(-5 - i) = \frac{e^{(-5-i)i} - e^{-(-5-i)i}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{1-5i} - e^{-1+5i}) =$$

$$= -\frac{i}{2} [e(\cos 5 - i \sin 5) - e^{-1}(\cos 5 + i \sin 5)] =$$

$$= -\sin 5 \cdot \operatorname{ch} 1 - i \cos 5 \cdot \operatorname{sh} 1. \blacktriangleleft$$

4)  $\operatorname{tg} z$  ти  $z = 1 + i$  де эсептегиле.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \operatorname{tg}(1+i) &= \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)} = \frac{e^{(1+i)i} - e^{-(1+i)i}}{i[e^{(1+i)i} + e^{-(1+i)i}]} = -i \frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{[e^{-1+i} + e^{1-i}]} = \\ &= i \frac{e(\cos 1 - i \sin 1) - e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1)}{e(\cos 1 - i \sin 1) - e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1)} = \frac{\sin 1 \cosh 1 + i \cos 1 \sinh 1}{\cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1} = \\ &= 0.272 + i 1,085. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5)  $\operatorname{ch} z$  функциясын  $z = -1 + i$  чекитиндеги маанисин эсептегиле.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \operatorname{ch}(-1+i) &= \frac{1}{2} [e^{-1+i} + e^{(-1+i)}] = \frac{1}{2} e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + \frac{1}{2} e(\cos 1 - i \sin 1) = \\ &= \cos 1 \frac{e+e^{-1}}{2} - i \sin 1 \frac{e-e^{-1}}{2} = \cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## 2 – КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү функциялардын берилген чекиттеги маанилерин тапкыла:

10.  $w = e^z, \quad z = -\frac{\pi}{6} i$

(Жообу:  $\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$ ).

11.  $w = \cos z, \quad z = 2 - i$

(Жообу:  $\cos 2 \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \operatorname{sh} 1$ ).

12.  $w = 3^z; \quad z = 2 + i$

(Жообу:  $e^{2 \ln 3 - 2\pi k} (\operatorname{ch} 3 + i \sin \ln 3)$ ).

13.  $w = \ln(1 + \operatorname{sh} z), \quad z = \frac{\pi}{2} i$

(Жообу:  $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} i$ ).

14.  $w = \operatorname{sh} z, \quad z = i - 3$

(Жообу:  $-sh3\cos 1 + i ch3\sin 1$ ).

15.  $w = e^{e^z}$ ,  $z = 1 + \frac{\pi}{2}i$

(Жообу:  $\cos e + i \sin e$ ).

16.  $w = \operatorname{Ln} z$ ,  $z = 1 - i$

(Жообу:  $\frac{1}{2} \ln 2 + (2\pi k - \frac{\pi}{4})i$ ).

17.  $w = ch \frac{i}{2}$ ,  $z = \frac{2}{\pi}i$ .

(Жообу: 0).

### 17.1. МАСЕЛЕЛЕР (№ 1 тапшырма)

Төмөндөгү комплекстик сандардын бардык маанилерин тапкыла:

(1)  $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$

(7)  $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2)  $\sqrt[5]{2-2i}$

(8)  $\sqrt[5]{-1+i}$

(3)  $\sqrt[3]{-8}$

(9)  $(1+i\sqrt{3})-8$

(4)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$

(10)  $\sqrt[5]{-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}$

(5)  $\sqrt[4]{-4}$

(11)  $\sqrt[4]{-18-18i\sqrt{3}}$

(6)  $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$

(12)  $\sqrt[6]{-i}$

(13)  $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$

(14)  $\sqrt[4]{-9}$

(15)  $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^4$

(16)  $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

(17)  $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$

(18)  $\sqrt[3]{27}$

$$\begin{array}{ll}
 (19) & (-\sqrt{3} + i)^4 \\
 (20) & \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\
 (21) & \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\
 (22) & \sqrt[5]{-1} \\
 (23) & \sqrt[4]{-\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}i} \\
 (24) & (1 + i)^{10} \\
 (25) & \sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}} \\
 (26) & \sqrt[3]{2 + 2i} \\
 (27) & \sqrt[5]{i} \\
 (28) & \sqrt[6]{-729} \\
 (29) & \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} \\
 (30) & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3.
 \end{array}$$

## 17.2. МАСЕЛЕЛЕР (№ 2 тапшырма)

Комплекстик тегиздиктеги  $D$  областы барабарсыздыктардын системасы менен берилген. Бул областты штрихтеп көргөзгүлө.  $D$  областын чегин бир боёк менен, ал эми сырткы чекиттерин көптүгүн башка бир боёк менен көрсөткүлө:

$$(1) \begin{cases} 1 \leq |z - i| < 2 \\ \operatorname{Re} z < 3 \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} |z| > 1 \\ -1 < \operatorname{Im} z \leq 1 \\ 0 < \operatorname{Re} z \leq 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} |z - 1| \leq 1 \\ |z + 1| > 2 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} |z + i| \geq 1 \\ |z| < 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} |z - i| \leq 2 \\ \operatorname{Re} z > 1 \end{cases} \qquad (6) \begin{cases} |z + i| < 1 \\ |z - i| \leq 1 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} |z - 1| \leq 1 \\ \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ \arg z(z - 1) > \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (8) \begin{cases} |z - 1| > 1 \\ |z - 1 - 2i| > 1 \\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} |z+1| \geq 1 \\ |z+i| < 1 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} |z+i| \leq 2 \\ |z-i| > 2 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 2 \\ \operatorname{Re} z > 0 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} |z-1-i| \leq 1 \\ \operatorname{Im} z > 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 1 \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} |z-i| \leq 2 \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2 \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} |z-i| \leq 1 \\ \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} |z-1| > 1 \\ -1 \leq \operatorname{Im} z < 0 \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 3 \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} |z-1+i| \geq 1 \\ \operatorname{Re} z < 0 \\ \operatorname{Im} z \leq -1 \end{cases}$$

$$(17) \begin{cases} z\bar{z} \leq 2 \\ \operatorname{Re} z < 1 \\ \operatorname{Im} z \geq -1 \end{cases}$$

$$(18) \begin{cases} |z| < 2 \\ \operatorname{Re} z \geq 1 \\ \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(19) \begin{cases} |z-1-i| \geq 1 \\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$$

$$(20) \begin{cases} |z-i| < 1 \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4} \\ \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} \operatorname{Im} \bar{z}^2 > -2 \\ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \end{cases}$$

$$(22) \begin{cases} |z| < 2 \\ -\frac{\pi}{4} \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(23) \begin{cases} \operatorname{Im} \bar{z}^2 > -2 \\ |z| < 4 \end{cases}$$

$$(24) \begin{cases} |z-1-i| < 1 \\ \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(25) \begin{cases} |z| \leq 1 \\ \arg(z+i) > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(26) \begin{cases} \operatorname{Im} \frac{2}{z} \leq 1 \\ \arg z > -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(27) \begin{cases} \operatorname{Im} \bar{z}^2 > 1 \\ |z| \leq 3 \end{cases}$$

$$(28) \begin{cases} |z+i| < 1 \\ -\frac{3}{4}\pi \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(29) \begin{cases} \arg z < \frac{\pi}{4} \\ \arg(z-1) \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \operatorname{Im} z < 1 \end{cases}$$

$$(30) \begin{cases} |z+2| + |z-2| \leq 5 \\ \operatorname{Re} z > 0 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

### 17.1.4 Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардын предели, үзгүлтүксүздүгү

Айталы, комплекстик тегиздиктин кайсы бир  $z_0 = x_0 + iy_0$  чекитин жакынкы чеке белинде  $w = f(z)$  функциясы берилсин ( $z_0$  чекитинин өзүндө аныкталбай калышы да мүмкүн).

**17.3 Аныктама.** Эгерде кандай гана жетишерлик кичине  $\varepsilon > 0$  санын алганыбызга карабастан, ага жараша жетишерлик кичине  $\delta > 0$  саны табылып,  $z_0$  чекитинин  $\delta$  –чеке белинде жайгашкан бардык  $z$  чекиттериндеги функциянын  $f(z)$  маанилери,  $A$  комплекстик санынын  $\varepsilon$  –чеке белинде жайгашышса, анда  $A$  санын  $z \rightarrow z_0$  умтулгандагы  $f(z)$  функциясын предели деп айтып, символикалык түрдө

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (6)$$

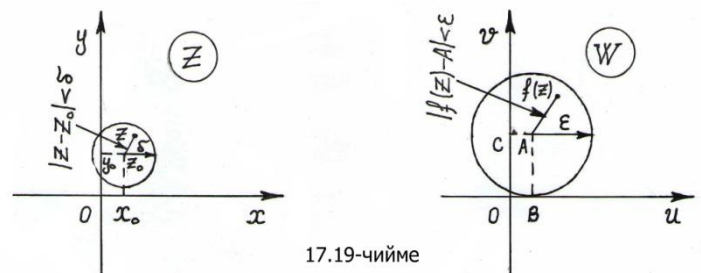
көрүнүштө жазабыз.

Баяндалган аныктаманы аралыктарды ченөөнүн (2) эрежеси боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon, \quad (7)$$

деп жазууга болот (17.19 – чийме). Мында  $A = B + iC$  чекити комплекстик тегиздикте чексиз алыстатылбаган, б.а. модулу чектүү комплекстик сан ( $|A| = \sqrt{B^2 + C^2} < +\infty$ ).



Ошентип  $A$  саны,  $z \rightarrow z_0$  умтулгандагы  $f(z)$  функциясын предели болсо, анда (6) пределин мааниси,  $z_0$  чекитине  $z$  өзгөрүлмөлөрү бардык багыт боюнча келгенине, же кайсыл жол менен умтулганынан көз каранды бобостон бирөө гана болот.

Комплекстик функция чыныгы жана жалган бөлүктөрдөн турган эки өзгөрүлмөлүү чыныгы функциялардан тургандыктан,

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  комплекстик өзгөрүлмөлүү функциянын пределин, чыныгы өзгөрүлмөлүү функциялардын төмөндөгүдөй кош пределдери катарында түшүнүүгө да болот:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C. \end{cases} \quad (8)$$

Мындан комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги пределин эсептөө эрежелери, кош пределди эсептөө эрежелерине боюнча жүргүзүлүп, кош пределдин касиеттеринин толугу менен аткарылышы келип чыгат:

$$1^0. \lim_{z \rightarrow z_0} \alpha \cdot f(z) = \alpha \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad \alpha - const.;$$

$$2^0. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

$$3^0. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

$$4^0. \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \left( \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \right).$$

Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциянын  $z_0$  чекитиндеги пределин эсептөөдө, анын  $z_0$  чекитиндеги  $f(z_0)$  маанисин жашар – жашабасы жөнүндө сөз кылынбай, функциянын  $f(z)$  маанилерин  $A$  комплекстик санынын  $\varepsilon$  – чеке белине кирер – кирбесине маани берилет.

Комплекстик функциянын  $z_0 = x_0 + iy_0$  чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү жөнүндө сөз кылганда, негизги көңүл функциянын  $z_0$  чекитиндеги  $f(z_0)$  маанисин жашашына бурулат. Айталы  $f(z)$



функциясы  $z_0$  чекитинде аныкталып, модулу чектелген  $f(z_0)$  маанисине ээ болсун дейли.

**17.4 Аныктама.** Эгерде  $w = f(z)$  функциясын  $z_0$  чекитиндеги предели жашап,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (9)$$

теңдештиги орун алса, анда  $f(z)$  функциясын  $z_0$  чекитинде үзгүлтүксүз функция деп атайбыз.

Ошентип,  $z_0$  чекитинде мааниси менен предели дал келген функция  $z_0$  чекитинде үзгүлтүксүз болуп, аралыктарды ченөө эрежеси боюнча

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  шарты аткарылат, б.а. аргументтердин  $z_0$  чекитине жетишерлик (кичине) жакын  $\delta$  – мерчемине чейинки жакындыкта жайгашкан  $z$  маанилерине, функциянын  $f(z_0)$  чекитине жетишерлик жакын (кичине)  $\varepsilon$  – мерчемине чейинки  $f(z)$  маанилери тиешелеш коюлат.

Комплекстик функция чыныгы жана жалган бөлүктөрдөн турган  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  көрүнүштө жазылгандыктан, анын

$z_0 = x_0 + iy_0$  чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү, эки  $x, y$  өзгөрүлмөлүү чыныгы  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  функцияларын  $(x_0; y_0)$  чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү менен тең күчтүү болорун көрөбүз

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0). \end{cases} \quad (10)$$

Ошондуктан § 1.3 темасында (2 – бөлүк) баяндалган эки өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функцияларга тиешелүү негизги касиеттер, комплекстик өзгөрүлмөлүү функцияларда да толугу менен сакталат.

Эгерде  $f(z)$  функциясы  $D$  көптүгүн ар бир  $z$  чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда аны бүтүндөй  $D$  көптүгүндө үзгүлтүксүз функция дейбиз.

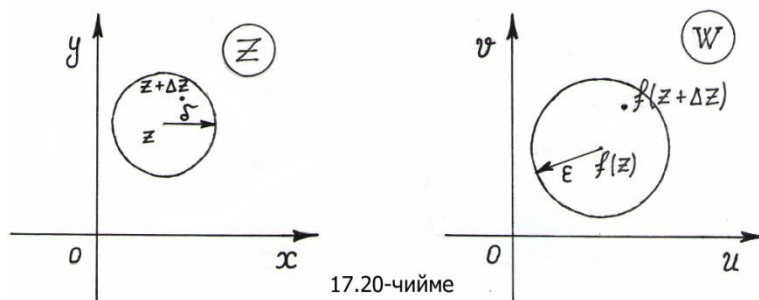
## §17.2 Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардан туунду алуу эрежелери. Аналитикалуулук шарты

### 17.2.1 Функциянын чекиттеги туундусу

Комплекстик тегиздикте берилген  $D$  областында аныкталган жана үзгүлтүксүз  $w = f(z)$  функциясы берилсин.  $D$  областын кайсы бир  $z = x + iy$  чекитине  $D$  областынан чыгып кетпей тургандай абалда

$z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$  өсүндүсүн берсек, анда үзгүлтүксүз функция катарында функция да тиешелүү  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$  өсүндүсүнө ээ болот (17.20 – чийме). Бул учурда аргументтин өсүндүсү

$z$  чекитине жетишерлик жакын же анын  $\delta$  – аймакчасында, ал эми функциянын тиешелүү өсүндүсү  $f(z)$  чекитине жетишерлик жакын, же анын  $\varepsilon$  – аймакчасында жайгашкан деп эсептелет.



**17.5 Аныктама.** Эгерде 
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

пределин мааниси жашаса, анда ал маанини  $f'(z)$  функциясынан  $z$  чекитинде алынган туунду деп атап, символикалык түрдө  $f'(z)$ ,  $\frac{df}{dz}$  көрүнүштөрдө белгилейбиз

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \quad (11)$$

$z$  чекитинде чектүү туундусу жашаган функцияларды, ушул чекитте дифференцирленүүчү дейбиз.

Комплекстик функциянын пределин  $1^0 - 4^0$  касиеттерине жана туунду алуунун (11) эрежесине таянып, туунду алууда суммадан, көбөйтүндүдөн, тийиндиден, татаал жана тескери функциялардан туунду алуунун эрежелерин сакталарын көрөбүз:

$$\frac{d}{dz} [c \cdot f(z)] = c \cdot \frac{df(z)}{dz}, \quad c - const.;$$

$$\frac{d}{dz} [f(z) + g(z)] = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz};$$

$$\frac{d}{dz} [f(z) \cdot g(z)] = \frac{df(z)}{dz} \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{dg(z)}{dz};$$

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\frac{df(z)}{dz} \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{dg(z)}{dz}}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0;$$

$$\text{Эгерде } w = g(z) \text{ болсо, } \frac{d}{dz} [f(g(z))] = \frac{df(g(z))}{dw} \cdot \frac{dw}{dz};$$

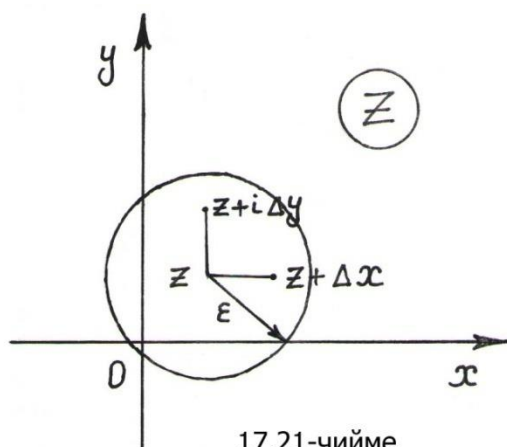
Эгерде  $w = f(z)$  функциясына тескери болгон  $z = \varphi(w)$  функциясы табылса, анда алардын туундуларын арасында

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} \text{ байланышы орун алат } \left( \frac{d\varphi(w)}{dw} \neq 0 \right).$$

Эгерде  $w = f(z)$  функциясы  $D$  областын ар бир чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда аны бүтүндөй  $D$  областында дифференцирленүүчү деп айтабыз. 17.5 – аныктамада  $\Delta z \rightarrow 0$  умтулуу процесси тегиздикте жүргөндүктөн,  $\Delta z$  өсүндүсү кандай багыттарга карата өскөнүнө жана кайсы багыт боюнча  $\{\Delta z\} \rightarrow 0$  умтулганына көз каранды болбостон, (11) предели жалгыз гана чектүү  $f'(z)$  пределине ээ болот деп түшүнөбүз.

Мисалы,  $w = \operatorname{Re} z = x$  функциясы комплекстик тегиздиктеги бир да чекитте дифференцирленүүчү болбойт, анткени анын (11) эрежеси менен эсептелген

$$w' = (\operatorname{Re} z)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re} z}{\Delta z}$$



17.21-чийме

туундусу,  $\{\Delta z\} \rightarrow 0$  умтулуу багытынан көз каранды болот (17.21 – чийме). Чынында эле,  $\Delta z = \Delta x + i 0$  көрүнүштөгү  $Ox$  огуна

параллель багыт бойлогон өсүндү десек, туундусу

$$w' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re} z}{\Delta z} =$$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} = 1$  санына, ал эми  $\Delta z = 0 + i \Delta y$  өсүндүсүн  $Oy$  огуна параллель багыт боюнча берсек, анда туундусу

$w' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{Re(z+\Delta z) - Re z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x+0-x}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x-x}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{i\Delta y} = 0$  санына барабар болот.

Ошентип, комплекстик функциянын  $z = x + iy$  чекитиндеги дифференцирленүүчүлүгү, функциянын чыныгы жана жалган бөлүктөрүн  $(x; y)$  чекитине чексиз жакын  $\delta$  – чеке белиндеги жүрүм – турумуна байланыштуу болот. Ошондуктан туунду алуунун (11) эрежеси менен функциянын чыныгы жана жалган бөлүктөрүндө турган эки өзгөрүлмөлүү функциялардын дифференцирленүүчүлүгүн байланыштырган, жаңы эрежелерди киргизүүгө болот.

## 17.2.2 Коши – Римандын шарттары

**17.1 Теорема.** *Айталы,  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  функциясы  $z = x + iy$  чекитинде дифференцирленүүчү болсун. Анда  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  функцияларын  $(x; y)$  чекитинде  $x, y$  өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече туундулары жашап,*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{менен} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (12)$$

*теңдештиктери орун алат.*

(12) ни  $u'_x = v'_y$  жана  $u'_y = -v'_x$  көрүнүштөрдө да жазууга болот.

**Далилдөө.** ► Теореманын шарты боюнча  $f(z)$  функциясы  $z$  чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан,  $\{\Delta z\} \rightarrow 0$  умтулуу процесси кайсыл багыт боюнча жүргөнүнө көз каранды болбостон, (11) пределинин жалгыз гана чектүү  $f'(z)$  предели (туундусу) жашайт.

$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$  өсүндүсүн  $Ox$  жана  $Oy$  координаттык окторуна параллель багыттар боюнча нөлгө умтулталы (17.21 – чийме):

1)  $Ox$  огуна параллель өсүндү берсек  $\Delta z = \Delta x + i 0$  болуп, (11) эрежеси

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = f'(z)$  көрүнүштөгү теңдештикке келет.

$f(z + \Delta x) = u(x + \Delta x, y) + i v(x + \Delta x, y)$  болгондуктан, теңдештиктин сол жагындагы пределди

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x, y) - i v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y) + i [v(x+\Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \\ &+ i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad \text{жекече туундуларын} \\ &\text{суммасы катарында эсептөөгө болот.} \end{aligned}$$

2) Оу координаттык огуна параллель өсүндү берсек  $\Delta z = 0 + i \Delta y$  болуп, (11) эрежеси  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z+i \Delta y) - f(z)}{i \Delta y} = f'(z)$  көрүнүштө жазылат.

Мындан

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z+i \Delta y) - f(z)}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+i \Delta y) + i v(x, y+i \Delta y) - u(x, y) - i v(x, y)}{i \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+i \Delta y) - u(x, y) + i [v(x, y+i \Delta y) - v(x, y)]}{i \Delta y} = \\ &= i \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+i \Delta y) - u(x, y)}{(i)^2 \Delta y} + i \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y+i \Delta y) - v(x, y)}{i \cdot \Delta y} = \\ &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad \text{туундусуна ээ болобуз.} \end{aligned}$$

Эки багыт боюнча  $\{\Delta z\} \rightarrow 0$  умтулганынан көз каранды болбостон (11) пределин мааниси болгон  $f'(z)$  жалгыз гана болгондуктан,

$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$  теңдештиги орун алат. Анын чыныгы жана жалган бөлүктөрүн теңдештирип, чекитте дифференцирленүүчү комплекстик функциялар үчүн сөзсүз аткарылуучу Коши – Римандын шарттары деп аталган (12) теңдештиктердин туура болорун далилдеген болобуз. ◀

Тескерисинче Коши – Римандын шарттары аткарылса, комплекстик функция дифференцирленүүчү болобу деген суроого жооп берели.

**17.2 Теорема.** Айталы, чыныгы өзгөрүлмөлүү  $u(x, y), v(x, y)$  функциялары  $(x; y)$  чекитинде дифференцирленүүчү болуп, Коши – Римандын (12) шарттарына баш ийишсин. Анда

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  комплекстик өзгөрүлмөлүү функциясы  $z = x + i y$  чекитинде дифференцирленүүчү болот.

**Далилдөө.** ►  $(x; y)$  чекитинде дифференцирленүүчү эки өзгөрүлмөлүү функциянын ушул чекиттеги толук өсүндүсүн (2 – бөлүк, §10.1, 10.10 – формула)

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = u'_x(x, y)\Delta x + u'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\rho)$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = v'_x(x, y)\Delta x + v'_y(x, y)\Delta y + \beta(\rho)$$

теңдештиктери көрүнүштөрдө жазууга болору белгилүү. Мында  $\alpha(\rho), \beta(\rho)$  – чексиз кичине чоңдуктары,  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  – чексиз кичине чоңдугуна салыштырмалуу чексиз кичине деп эсептелет.

Акыркы теңдештиктердин экинчисин  $i$  ге көбөйтүп, биринчисине кошсок, сол жагында  $f(z)$  комплекстик функциясын өсүндүсү

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i v(x + \Delta x, y + \Delta y) - i [u(x, y) + v(x, y)] = f(z + \Delta z) - f(z)$$
 келип чыккандыктан,

$$f(z + \Delta z) - f(z) = [u'_x(x, y) + i v'_x(x, y)]\Delta x + [u'_y(x, y) + i v'_y(x, y)]\Delta y + \gamma(\rho) \quad (13)$$

теңдештигине ээ болобуз. Мында  $\gamma(\rho) = \alpha(\rho) + i \beta(\rho)$  – чексиз кичине чоңдук. (12) шарттарын эске алып, (13) теңдештигинде  $u'_y, v'_y$  жекече туундуларын  $u'_x, v'_x$  аркылуу туюнтуп топтоштуруп, теңдештикти

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (u'_x + i v'_x)(\Delta x + i \Delta y) + \gamma(\rho)$$

көрүнүшкө келтирүүгө болот. Акыркы теңдештиктин эки жагын тең

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y \text{ өсүндүсүнө бөлүп жиберип, } \Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases} \text{ же } \rho \rightarrow 0$$

умтулгандагы пределге өтсөк, (11) эрежесинин аткарылары же

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u'_x + i v'_x$  пределин чектүү маанисин жашары келип чыгат. Анда 17.5 – аныктаманын негизинде  $f(z)$  функциясы  $(x; y)$  чекитинде дифференцирленүүчү болот. ◀

**17.6 Аныктама.** Эгерде  $f(z)$  функциясы  $z$  чекитин өзүндө жана анын кандайдыр бир жакынкы чеке – белинде дифференцирленүүчү болсо, анда аны  $z$  чекитинде аналитикалык функция деп атайбыз. Ал эми  $D$  областын ар бир  $z$  чекитинде аналитикалык болгон функцияны, бүтүндөй  $D$  областында аналитикалык дейбиз.

Ошентип, бардык аналитикалык функциялар Коши – Римандын шарттарына баш ийишип, туундулары үчүн

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y = u'_x - i u'_y = v'_y + i v'_x \quad (14)$$

теңдештиги орун алат.

Эгерде  $f_1(z), f_2(z), \dots$  функциялары  $D$  областында аналитикалык болсо, анда алардын суммасы да жана көбөйтүндүсү да  $D$  областында аналитикалык функциялар болушат. Ошондой эле  $D$  областында аналитикалык  $f_1(z)$  жана  $f_2(z)$  функциялары берилишсе, анда  $f_2(z) \neq 0$  теңдемесин тамыры болбогон  $D$  областын ар кандай чекитинде  $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$  тийинди – функциясы да аналитикалык болот.

Аналитикалык функциялардын  $u(x, y)$  – чыныгы, же  $v(x, y)$  – жалган бөлүктөрүн бирөөсү белгилүү болсо эле, Коши – Римандын (12), (14) теңдештиктерин жардамы менен экинчи бөлүгүн таап, аналитикалык функцияны калыбына келтирүүгө болот.

### Мисалдар

1)  $w = e^{3z}$  функциясы үчүн Коши – Римандын шарттары аткарыларын текшергиле.

**Чыгаруу.** ► Берилген функцияны Эйлердин формуласын жардамы менен чыныгы жана жалган бөлүктөргө

$$e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x} e^{3iy} = e^{3x} (\cos 3y + i \sin 3y)$$

$u = e^{3x} \cos 3y$ ,  $v = e^{3x} \sin 3y$  ажыратып, алардын жекече туундаларын эсептеп салыштыралы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x} \cos 3y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{3x} \cos 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x} \sin 3y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x} \sin 3y. \end{cases}$$

Коши-Римандын шарттары аткарылат. Демек,  $e^{3z}$  функциясы комплекстик тегиздикте аналитикалык болот. ◀

2) Коши-Римандын шарттары  $w = z - \frac{1}{z}$  функциясы үчүн аткарыларын көрсөткүлө.

**Чыгаруу.** ▶  $z = x + iy$  болгондуктан берилген функция

$$w = x + iy - \frac{1}{x + iy} = x + iy - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \left( x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left( y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

$$u(x, y) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = y + \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ көрүнүштөгү чыныгы жана}$$

жалган бөлүктөрдөн туруп,  $u$  жана  $v$  функциялары

$O(0,0)$  ( $x = 0, y = 0$ ) чекити менен дал келбеген ар кандай чекитте 1-тартиптеги жекече туундуларга ээ:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{x^2 + y^2 - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - y2y}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Салыштырып көрсөк Коши-Римандын шарттары аткарылат. Демек,

$w = z - \frac{1}{z}$  функциясы комплекстик тегиздиктин  $z = 0$  чекитинен башка бардык чекиттеринде аналитикалык функция болот. ◀



3) Коши-Римандын шарттары  $w = \cos i \bar{z}$  функциясы үчүн аткарыларын же аткарылбасын изилдегиле.

**Чыгаруу.** ►  $z = x + i y$  болгондуктан  $\bar{z} = x - i y$  жана

$i \bar{z} = i(x - i y) = i x - i^2 y = y + i x$  болот. Анда

$$\cos i z = \cos(y + i x) = \cos y \cos i x - \sin y \sin i x = \cos y \operatorname{ch} x - i \sin y \operatorname{sh} x,$$

$u(x, y) = \cos y \operatorname{cosh} x$ ,  $v(x, y) = -\sin y \operatorname{sh} x$  чыныгы жана жалган бөлүктөрүн таап, жекече туундуларын

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \operatorname{sh} x, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos y \operatorname{sh} x. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin y \operatorname{ch} x, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y \operatorname{ch} x. \end{cases}$$

салыштырсак, Коши-Римандын шарттары  $z = 0 + i 0 = 0$  чекитинде гана аткарылып, калган чекиттерде аткарылбайт. Демек,  $w = \cos i \bar{z}$  функциясы комплекстик тегиздиктин  $z = 0$  чекитинен башка бардык чекиттерде аналитикалык эмес. ◀

4)  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  аналитикалык функция жана

$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2 + x$  болсун. Функциянын  $v(x, y)$  – жалган бөлүгүн калыбына калыбына келтирип, берилген функцияны тапкыла.

**Чыгаруу.** ►  $f(z)$  аналитикалык функция болгондуктан, Коши-Римандын шарттары аткарылат. Демек

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$$

$$\text{б.а.} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

болот. Акыркы теңдемелердин 1 – синин эки тарабынан тең  $y$  ке карата интеграл алсак,

$v(x, y) = (2x + 1)y + c(x)$  көрүнүштө табылат. Интегралды эсептөөдө  $x$  өзгөрүлмөсү турактуу сан катары катышкандыктан, каалагандай  $C$  турактуу санын  $x$  ке карата  $C = c(x)$  – каалгандай функция деп алуудан кошулуучунун турактуулугу бузулбайт.  $c(x)$  ти аныктоо үчүн, табылган

$v(x, y)$  функциясын  $v'_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$  шартына баш ийишин (акыркы теңдемелердин 2 – чиси) пайдаланабыз.

$$\text{Анда } v'_x = [(2x + 1)y + c(x)]'_x \Leftrightarrow 2y = 2y + c'(x)$$

теңдемесин алабыз. Мындан  $c'(x) = 0$  же  $c(x) = C_1$  – каалаган сан экендиги келип чыгат. Демек, биз издеген функция

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i((2x + 1)y + C_1) = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + C_1 = \\ = (x^2 + iy)^2 + x + iy + C_1 = z^2 + z + C_1 \text{ көрүнүштө жазылат. } \blacktriangleleft$$

5)  $w = \bar{z} = x - iy$  функциясы дифференцирленүүчү болобу?

**Жооп.** ► Берилген функцияда  $u = x$ ,  $v = -y$  болуп,

$\forall x, y$ :  $u'_x = 1 \neq v'_y = -1$  Коши – Римандын (12) шарттары аткарылбагандыктан 17.2 – теореманын негизинде, комплекстик тегиздиктин бардык чекиттеринде дифференцирленүүчү эмес. ◀

б)  $w = z \cdot \bar{z}$  функциясын аналитикалуулугун изилдегиле.

**Изилдөө.** ►  $w = z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$  болгондуктан

$u = x^2 + y^2$ ,  $v = 0 \Leftrightarrow u'_x = 2x$ ,  $v'_y = 0$  жекече туундуларына ээ болобуз. Анда  $u'_x = v'_y$  теңдештиги  $(x; y) = (0; 0)$  чекитинде гана аткарылып, функция бир гана ушул чекитте аналитикалык болот. ◀

7)  $w = f(z)$  аналитикалык функциясынын чыныгы бөлүгү

$u(x, y) = e^x \cos y$  белгилүү болсо, анда аны  $f(0) = 1$  шартын канааттандыра тургандай кылып калыбына келтиргиле.

**Чыгаруу.** ►  $w = f(z)$  функциясын эки ыкма менен калыбына келтирип көрөлү:

**1 – ыкма.**  $u'_x = (e^x \cos y)'_x = e^x \cos y$  жекече туундусун эсептеп,  $f(z)$  аналитикалык болгондуктан Коши – Римандын (12) шарты же

$u'_x = v'_y$  теңдештиги орун аларын эске алып,

$$v'_y = e^x \cos y \Leftrightarrow v(x, y) = \int e^x \cos y \, dy = e^x \int \cos y \, dy =$$

$$= e^x \sin y + c(x)$$

ээ болобуз. Мында каалагандай  $C$  турактуу кошулуучусун  $x$  ке карата  $C = c(x)$  функция деп алуу жалпылыкты бузбайт, анткени  $y$  боюнча интеграл алууда  $x$  өзгөрүлмөсү турактуу сан катары катышат. Табылган  $v(x, y) = e^x \sin y + c(x)$  функциясынан  $x$  боюнча алынган

$$v'_x = (e^x \sin y + c(x))'_x = e^x \sin y + c'(x) \text{ туунду, (12) шарты боюнча}$$

$$v'_x = -u'_y \text{ же } e^x \sin y + c'(x) = e^x \sin y$$

теңдештигин канааттандырышы керек. Бул теңдештиктен

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = C - const. \text{ турактуу болору келип чыгат.}$$

Ошентип изделүүчү аналитикалык функция

$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C)$  көрүнүштө табылат. Кошумча коюлган  $f(0) = 1$  шартын пайдаланып  $z = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$  десек,

$$f(0) = e^0 \cos 0 + i(e^0 \sin 0 + C) \Leftrightarrow 1 = 1 + iC \Rightarrow C = 0 \text{ табылып,}$$

изделүүчү аналитикалык функция  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  көрүнүшүндө калыбына келтирилет.

**2 – ыкма.** Аналитикалык функциянын жалган бөлүгүн ийри сызыктуу интегралды пайдаланып табуу оңтойлуу. Изделүүчү аналитикалык функция Коши – Римандын шарттарына баш ийгендиктен,

$$v'_x = -u'_y = e^x \sin y, \quad v'_y = u'_x = e^x \cos y$$

теңдештиктери орун алат. Ошондуктан  $v(x, y)$  – жалган бөлүгүн

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(0;0)}^{(x;y)} e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy + C = \\ &= \int_{(0;0)}^{(x;y)} d(e^x \sin y) + C = e^x \sin y + C \end{aligned}$$

көрүнүштө аныктоого болот. Кошумча коюлган шарт боюнча

$f(0) = u(0, 0) + i v(0, 0) = 1 \Rightarrow v(0, 0) = 0$  болгондуктан турактуу чоңдук  $C = 0$  деп тандалып, акырында жалган бөлүк

$v(x, y) = e^x \sin y$  көрүнүштө болоруна ишенебиз. Мындан калыбына келтирүүнү талап кылган аналитикалык функция

$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  көрүнүштө жазылары келип чыгат. ◀

### 3 – КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөндөгү берилген комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялардын  $\operatorname{Re}$ (чыныгы) жана  $\operatorname{Im}$ (жалган) бөлүктөрүн тапкыла жана аналитикалык болорун же болбосун аныктагыла.

a)  $w = \sin 2z$  ( Жообу:  $u = \sin 2x \operatorname{ch} 2y$ ,  $v = \cos 2x \operatorname{sh} 2y$ ,

$w = f(z)$  – аналитикалык функция ).

b)  $w = \cos(iz - 1)$  (Жообу:  $u = \cos(y + 1)\operatorname{ch} x$ ,  $v = \sin(y + 1)\operatorname{sh} x$ ,

$w = f(z)$  – аналитикалык функция ).

c)  $w = e^{-5iz+1}$  ( Жообу:  $u = e^{-5y+1}\cos 5x$ ,  $v = -e^{-5y+1}\sin 5x$ ,  $w = f(z)$  – аналитикалык функция ).

d)  $w = z^2 + 5z$  (Жообу:  $u = x^2 - y^2 + 5x$ ,  $v = 2xy + 5y$ ,  $w = f(z)$  – аналитикалык функция ).

e)  $w = z \operatorname{Re} z$  (Жообу:  $u = x^2$ ,  $v = xy$ ,  $w = f(z)$  – аналитикалык эмес функция).

f)  $w = \frac{1}{z}$  (Жообу:  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ , комплекстик

тегиздигинин  $z = 0$  чекитинен башка бардык чекиттеринде

$w = f(z)$  аналитикалык функция болот).

g)  $w = e^{z+\bar{z}}$  ( $u = e^{2x}$ ,  $v = 0$   $w = f(z)$  – аналитикалык функция эмес.

2. Төмөнкү бир бөлүгү берилген аналитикалык функцияны тургузгула.

$$a) v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; x \neq 0, y \neq 0 \text{ (Жообу: } f(z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} C_1 +$$

$$+ i \frac{x}{x^2 + y^2}; x \neq 0, y \neq 0, f(z) = \frac{i}{z} + C_1, z \neq 0).$$

$$b) u(x,y) = 2^x \cos(y \ln 2) \text{ (Жообу: } f(z) = 2^z + C).$$

### МАСЕЛЕЛЕР (№ 3 тапшырма)

Төмөндөгү берилген функциянын  $\operatorname{Re}$ (чыныгы) жана  $\operatorname{Im}$ (жалган) бөлүктөрүн тапкыла. Ошондой эле бул функциянын аналитикалык болорун же болбосун изилдегиле жана берилген чекиттеги маанисин тапкыла:

$$(1) \quad w = e^{-i\bar{z}}; \quad z = \frac{\pi}{4} + 2i;$$

$$(2) \quad w = z \operatorname{Re} z^2, \quad z = -2 - 3i;$$

$$(3) \quad w = z e^z, \quad z = 2 - \frac{\pi}{3}i;$$

$$(4) \quad w = \cos(2z - 3), \quad z = 2i;$$

$$(5) \quad w = e^{|z|^2} \operatorname{Im} z, \quad z = 2 - 9i;$$

$$(6) \quad w = (e^z - 2)^2, \quad z = \frac{\pi}{2}i;$$

$$(7) \quad w = z^3 - i\bar{z}, \quad z = -1 + i;$$

$$(8) \quad w = \sin z \operatorname{ch} z, \quad z = \pi i;$$

$$(9) \quad w = \sin z, \quad z = \frac{\pi}{4} + i;$$

$$(10) \quad w = z + \frac{i}{z}, \quad z = e^{1 + \frac{\pi}{4}i};$$

$$(11) \quad w = i \bar{z}^2, \quad z = e^{(x-i)^2};$$

$$(12) \quad w = \bar{z} + iz, \quad z = \frac{\pi}{4} + i;$$

$$(13) \quad w = \operatorname{sh} z, \quad z = 1 - \frac{\pi}{2}i;$$

- (14)  $w = sh \bar{z}$ ,  $z = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} i$ ;
- (15)  $w = e^{\frac{1}{z}}$ ,  $z = \frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$ ;
- (16)  $w = \ln \bar{z}$ ,  $z = 2 + 2i$ ;
- (17)  $w = \sin i \bar{z}$ ,  $z = \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{6}$ ;
- (18)  $w = \ln iz$ ,  $z = 3 + 4i$ ;
- (19)  $w = \sin z sh z$ ,  $z = \frac{\pi}{2} i$ ;
- (20)  $w = e^{z^2}$ ,  $z = 2(1+i)\sqrt{\pi}$ ;
- (21)  $w = z + \frac{i}{z}$ ,  $z = e^{1-\frac{3\pi}{4}i}$ ;
- (22)  $w = \frac{1}{z}$ ,  $z = \sin(\frac{\pi}{4} + i)$ ;
- (23)  $w = \sin \frac{i}{z}$ ,  $z = \frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$ ;
- (24)  $w = chi \bar{z}$ ,  $z = \frac{\pi}{4} - 2i$ ;
- (25)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ ,  $z = 3 + 4i$ ;
- (26)  $w = z^3$ ,  $z = i e^{i \ln i}$ ;
- (27)  $w = i z + \frac{i}{z}$ ,  $z = e^{2-\frac{\pi}{4}i}$ ;
- (28)  $w = i \ln \bar{z}$ ,  $z = 2 - \frac{\pi i}{2}$ ;
- (29)  $w = e^{z-\bar{z}}$ ,  $z = \ln sh(2 + \frac{\pi}{2} i)$ ;
- (30)  $w = \ln(1 + z^2)$ ,  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

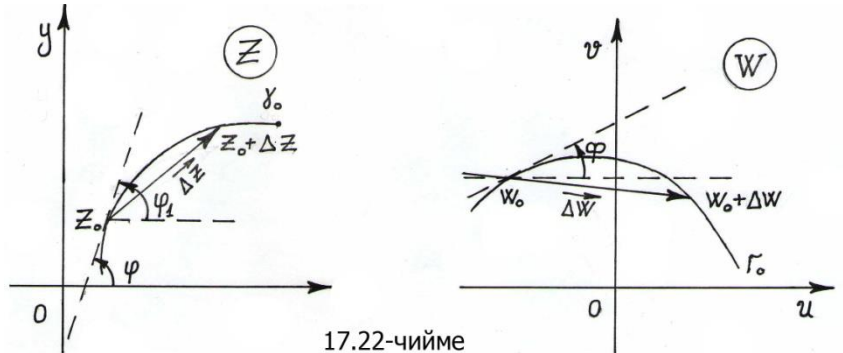
### 17.2.3 Комплекстик өзгөрүлмөлүү функциянын туундусунун геометриялык мааниси. Конформдуу чагылтуулар

$D$  областында аналитикалык  $w = f(z)$  функциясы берилсин.  $D$  областынан кайсы бир  $z_0 = x_0 + i y_0$  чекитин белгилеп алып, бул чекит аркылуу өтүүчү жылмакай бир  $\gamma_0$  ийрисин жүргүзөлү.

Айталы,  $f(z)$  функциясы  $D$  областын ар бир  $z = x + i y$  чекиттерин комплекстик тегиздиктин кайсы бир  $W$  облстынын

$w = u + i v$  чекиттерине чагылтсын. Чагылтууда  $z_0 = x_0 + i y_0$  чекити  $w_0 = u_0 + i v_0$  чекитине, ал эми  $z_0$  чекитинен өткөн  $\gamma_0$  ийриси  $w_0$  чекитинен өтүүчү  $\Gamma_0$  ийрисине өтсүн дейли (17.22 – чийме).

Аналитикалуулуктун шарты боюнча  $D$  областын ар бир  $z$  чекитинде чектүү  $f'(z)$  туундулары жашайт. Белгиленген  $z_0$  чекитиндеги



17.22-чийме

туундуга  $f'(z_0) \neq 0$  деген шарт коюлсун, анда  $f'(z_0)$  комплекстик санын көрсөткүчтүү  $f'(z_0) = r e^{i\alpha}$  формада жазып,  $z_0$  чекитинде туунду алуунун (11) эрежесин

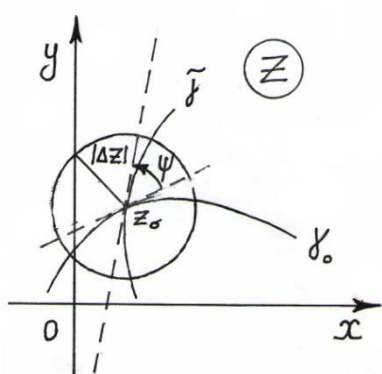
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = r e^{i\alpha} \quad (r = |f'(z_0)|, \quad \alpha = \arg f'(z_0))$$

көрүнүштө жазууга болот.

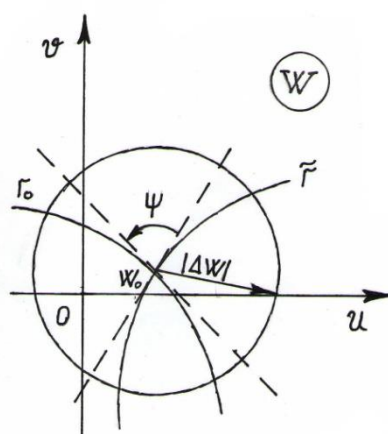
Эгерде  $z = z_0 + \Delta z$  өсүндү чекити  $\gamma_0$  ийрисине таандык болсо, анда ага тиешелеш коюлган  $w = w_0 + \Delta w$  өсүндү чекити да  $\Gamma_0$  ийрисине таандык болот. Анда  $Ox$  огу менен  $\gamma_0$  ийрисин кесүүчү  $\overrightarrow{\Delta z} = \overrightarrow{\Delta x} + i \overrightarrow{\Delta y}$  өсүндү векторун арасындагы бурч  $\arg \Delta z$ , ал эми  $Ou$  огу менен  $\Gamma_0$  ийрисин кесүүчү  $\overrightarrow{\Delta w} = \overrightarrow{\Delta u} + i \overrightarrow{\Delta v}$  өсүндү векторун арасындагы бурч  $\arg \Delta w$  болот.

Аргументтин өсүндүсү  $\gamma_0$  ийрисин бойлоп  $\Delta z \rightarrow 0$  умтулганда, функциянын тиешелүү өсүндүсү да  $\Gamma_0$  ийрисин чекиттери боюнча  $\Delta w \rightarrow 0$  умтулгандыктан, бир мезгилде

$\arg \Delta z \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \arg \Delta w \rightarrow \Phi$  умтулушуп,  $\gamma_0, \Gamma_0$  ийрилери кесүүчү  $\vec{\Delta z}, \vec{\Delta w}$  векторлору  $z_0$  жана  $w_0$  чекиттеринен жүргүзүлгөн жаныма түздөрдүн абалына умтулуп келип жетишет. Мында  $\varphi, \Phi$  бурчтары тиешелүү түрдө  $Ox$  жана  $Ou$  октору менен,  $z_0$  жана  $w_0$  чекиттеринде  $\gamma_0, \Gamma_0$  ийрилерине жүргүзүлгөн жаныма түздөрдүн арасындагы оң бурчтар (17.22 – чийме).



17.23-чийме



Комплекстик сандарды бөлүүдө, алардын аргументтери

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg w - \arg z$$

кемитилет.

Ошондуктан  $f'(z_0)$  туундусун аргументи

$$\alpha = \arg f'(z_0) =$$

$$\arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg z = \Phi - \varphi \quad (15)$$

көрүнүштө эсептелет.

Туундунун мааниси  $\Delta z \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow z_0$ ) умтулуу багытынан жана жолунан көз каранды болбостон бирөө гана болгондуктан,  $z_0$  чекити аркылуу өткөн бардык жылмакай ийрилер үчүн мындай  $\Phi - \varphi$  бурулуу айырмасы турактуу болот (Бирок  $\Phi, \varphi$  бурчтарын өздөрү ар кандай боло бериши мүмкүн). Мындан чагылтуудагы бурчтардын консерватизми же сакталуусу деп аталган (17.23 – чийме) төмөндөгү эреже келип чыгат:

**1 – Эреже.** Туундусу  $f'(z_0) \neq 0$  шартына баш ийген бардык аналитикалык  $f(z)$  функциялары аркылуу жүргүзүлгөн чагылтууларда,  $z_0$  чекитинен чыгуучу каалагандай  $\tilde{\gamma}, \gamma_0$  ийрилеринин арасындагы  $\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$  бурчу, алардын элестери болгон  $w_0$  чекитинен чыгуучу  $\tilde{\Gamma}, \Gamma_0$  ийрилерин арасындагы  $\Psi = \tilde{\Phi} - \Phi$  бурчуна барабар болот. Мындай чагылтууда бурчтардын абсолюттук чоңдуктары жана багыттары да сакталат.



Туунду алуунун (11) эрежесине таянып,  $f'(z_0)$  комплекстик санынын модулу

$$r = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} \quad \text{же} \quad |f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$$

көрүнүштө жазууга болот. Предел алдындагы туюнтма менен пределдин мааниси чексиз кичине чоңдукка гана айырмалангандыктан, чексиз кичине каталык менен  $\gamma$  ийрисин тандоодон көз каранды болбогон

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot |z - z_0| \quad \text{же} \quad |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| \quad (16)$$

теңдештигин орното алабыз.

(16) теңдештиги  $z$  тен  $z_0$  чекитине чейинки аралык менен, алардын элестери болгон  $w$ ,  $w_0$  чекиттерин арасындагы аралыктарды салыштырууга мүмкүнчүлүк түзүп, геометриялык жактан борбору  $z_0$  чекити болгон жетишерлик кичине айлана болсо, чексиз кичине каталык кетирүү тактыгы менен борбору  $w_0$  чекити болгон жетишерлик кичине айланага чагыларын түшүндүрөт (17.23 – чийме). Мындай чагылтуу окшош чагылтуу болуп, жетишерлик кичине кесиндилер ошондой эле жетишерлик кичине кесиндилерге окшош чагылат.

**2 – Эреже.** Туундусу  $f'(z_0) \neq 0$  шартына баш ийген бардык аналитикалык  $f(z)$  функциялары аркылуу жүргүзүлгөн чагылтууларда, аралыктардын турактуу созулуусу деп атлган (16) касиети орун алат. Чагылтууда  $z_0$  чекитиндеги туундунун модулу  $k = |f'(z_0)|$  – турактуусу, созулуу (кысылуу) же окшоштук деңгээлин көрсөтүүчү коэффициент катары кызмат кылат.

Мында, эгерде  $k = |f'(z_0)| > 1$  болсо, анда  $z_0$  дөн  $w_0$  гө өткөндө тегиздик «кеңейет», ал эми  $k = |f'(z_0)| < 1$  болсо, анда тегиздик «кысылат».

**17.7 Аныктама.**  $w = f(z)$  функциясы комплекстик тегиздикте берилишкен  $D$  областын  $W$  областына өз ара бир маанилүү чагылтса жана чагылтууда бурчтардын консерватизми менен аралыктардын турактуу созулуу касиеттери сакталса, анда аны конформдуу чагылтуу деп айтабыз.

Жогоруда 1, 2 – эрежелерде белгиленгендей,  $D$  областында нөлдөн айырмалуу туундуга ээ болгон бардык аналитикалык функциялар, конформдуу чагылтуулар болуп эсептелишет.

Ошентип конформдуулуктун критерийин же зарыл жана жетиштүү шартын төмөндөгүчө жазууга болот:

$w = f(z)$  функциясынын  $D$  областында конформдуу болушу үчүн, ушул областта анын бир беттүү (өз ар бир маанилүү), аналитикалык функция болушу жана  $\forall z \in D: f'(z) \neq 0$  шартын аткарылышы зарыл жана жетитүү.

### § 17.3 Элементардык функциялардын конформдуулугу

#### I. $a \neq 0$ жана $a$ менен $b$ – каалаган комплекстүү сандары үчүн

$w = az + b$  сызыктуу функциясы  $z$  тегиздигин  $w$  тегиздигине конформдуу чагылдырган функция болот. Себеби, тескериси да  $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$  бир маанилүү жашагандыктан  $f(z)$  өз ара бир маанилүү (бир беттүү) аналитикалык функция жана  $z$  комплекстик тегиздигин ар кандай чекитинде  $f'(z) = a \neq 0$  болот.

Сызыктуу функция менен берилген чагылдырууну жазылуу тартибине карата 3 этапка бөлүп, геометриялык жактан түшүндүрөлү:

1 – этап.  $w_1 = |a|z$  – чагылтуусу  $|a|$  эсе узартат (же кысат);

2 – этап.  $w_2 = e^{i \operatorname{arg} z} w_1$  – чагылтуусу координата башталмасын айланасында  $\operatorname{arg} z$  бурчуна бурат;

3 – этап.  $w_3 = w_2 + b$  – чагылтуусу  $b$  чекитине параллель которот.

$w = az + b$  ( $a \neq 0$ ) чагылдыруусу түз сызыктарды түз сызыкка чагылдырат (ошондой эле түз сызыктардын арасындагы бурчтар өзгөрбөйт), айланалар айланага чагылдырылат, каалаган геометриялык фигуралар өзүнө окшош фигураларга чагылдырылат.

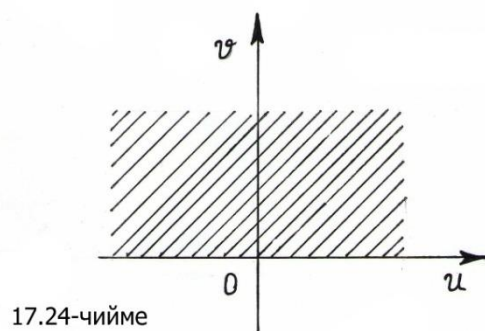
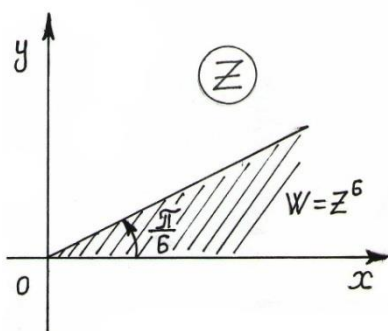
II.  $w = f(z) = z^n$  ( $n > 1, n \in \mathbb{N}$ ) – даражалуу функциясын көрсөткүчтүү  $w = \rho e^{i\varphi}$ ,  $z = r e^{i\theta}$  көрсөткүчтүү формада жазып,

$$\rho = r^n, \varphi = n\theta \quad (17)$$

ээ болобуз. (17) ни пайдаланып, эки башка  $z_1, z_2$  комплекстик сандарын модулдары  $|z_1| = |z_2|$  барабар, аргуменгтери

$\arg z_2 = \arg z_1 + \frac{2\pi}{n}k$  ( $k$  – бүтүн сан) байланышында болсо, анда алар бир эле  $w$  чекитине чагыларын көрөбүз.

Демек, жалпы  $z$  комплекстик тегиздигинде  $n > 1$  болгондо  $w = z^n$  функциясы бир маанилүү (бир беттүү) болбойт.



Бирок функция

$\alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}$  секторунда өз ара бир маанилүү (бир беттүү) болуп, анын туундусу  $w' = f'(z) = n z^{n-1}$  ( $n > 1, z \neq 0$ ) көрүнүшүндө эсептелип, секторду конформдуу чагылта алат. Мында  $\alpha$  каалагандай чыныгы сан. Мисал катары  $n = 12 > 1, \alpha = 0$  болгон учурда  $z$  тегиздигиндеги  $0 < \arg z < \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$  сектору,  $w$  тегиздигин жогорку жарым тегиздигине чагылтыларын көрсөтөбүз (17.24 – чийме). Чагылтууда сектордун  $z = 0$  чокусундагы бурч  $n = 12$  эсе чоңоюп,  $z = 0$  чекитинде конформдуулук бузулат.

### III. Бөлчөктүү-сызыктуу $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

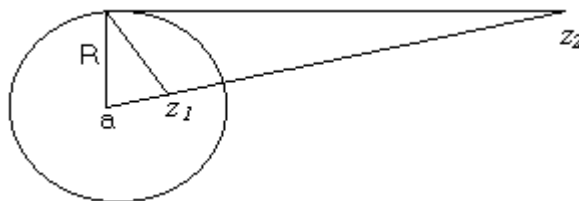
функциясын карайлы. Мында  $a, b, c, d$  – берилген комплекстүү сандар жана  $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$  болот.

Бул функция  $z$  комплекстик тегиздигинде бир маанилүү жана аналитикалык функция. Анын жалгыз гана  $z = -\frac{c}{d}$  - өзгөчө чекити бар жана ал өзгөчө чекит берилген функциянын жөнөкөй уюлу болот.

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$  болгондуктан, бөлчөктүү – сызыктуу функциянын туундусу  $z$  тегиздигиндеги ар кандай чектелген чекитте нөлдөн айырмалуу болот. Демек, бөлчөктүү – сызыктуу функция  $z$  тегиздигин  $w$  тегиздигине конформдуу чагылдырат. Бул чагылдыруу түз сызыктарды түз сызыктарга, айланаларды айланаларга чагылдырат. Айланага карата симметриялуу болгон чекиттер да, ал айлананын чагылдыруусу болгон айланага карата симметриялуу болгон чекиттерге чагылдырылат.

### Тескери чагылтуу

Борбору  $z = a$  чекити болгон жана радиусу  $R > 0$  санына барабар болгон айлананы карайлы (17.25 – чийме). 17.25 – чийме



Бул айлананын теңдемеси

$$|z - a| = R$$

болот.

**17.8 Аныктама.** Эгерде  $z_1$  жана  $z_2$  чекиттери төмөндөгү эки шарттарды:

- 1) бул чекиттер айлананын борбору болгон  $a$  чекитинен өткөн бир түз сызыкта жатышат;
- 2) бул чекиттерден айлананын борборуна чейинки аралыктардын көбөйтүндүсү айлананын радиусун квадратына барабар,

шарттарын  $|z_1 - a| \cdot |z_2 - a| = R^2$  канааттандырышса, анда  $z_1$  жана  $z_2$  чекиттери  $|z - a| = R$  айланасына карата **симметриялуу чекиттер** деп аталышат.

**17.9 Аныктама.** Ар кандай  $z$  чекитин кандайдыр бир айланага карата симметриялуу болгон чекитке чагылдырган чагылтуу, **тескери чагылтуу** деп аталат.

### IV. Жуковскийдин функциясы.

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

көрүнүштөгү комплекстик өзгөрмөлүү функция Жуковскийдин функциясы деп аталат.

Бул функция Н.Е.Жуковский тарабынан гидродинамиканын жана аэродинамиканын проблемаларын чечүүдө колдонулган. Айрыкча самолёттун канатын профилинин түзүлүшүн изилдөөдө, бул функция көп колдонулат. Мындай жаңы илимдин бутагын, б.а. самолёттун канатынын теориялык негиздерин Жуковский түзгөн.

Жуковскийдин  $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  функциясы  $z$  тегиздигин  $z = 0$  чекитинен башка бардык чекиттерде аналитикалык болот. Жуковскийдин функциясы бир беттүү болгон областты тактайлы. Айталы  $z_1, z_2$  чекиттери бир эле  $w$  чекитине чагылтылсын. Анда  $w - w = \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right) - \frac{1}{2} \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{1}{2} (z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_2 \cdot z_1} \right) = 0$

шарты аткарылышы керек. Бул шарт  $z_2 \cdot z_1 = 1$  болгондо гана аткарылат. Демек, Жуковскийдин функциясы  $z$  комплекстик тегиздигиндеги  $z_2 \cdot z_1 \neq 1$  шартын канааттандырган областтарда гана бир беттүү болот. Функциянын туундусу

$$w' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

көрүнүштө эсептелип,  $z = \pm 1$  чекиттеринен башка бардык чекиттерде нөлдөн айырмалуу болот. Андай болсо Жуковскийдин функциясы  $z = \pm 1, z = 0$  чекиттерин кармабаган, ар кандай эки башка чекиттери  $z_2 \cdot z_1 \neq 1$  шарттарына баш ийген областтарды конформдуу чагылта алат.

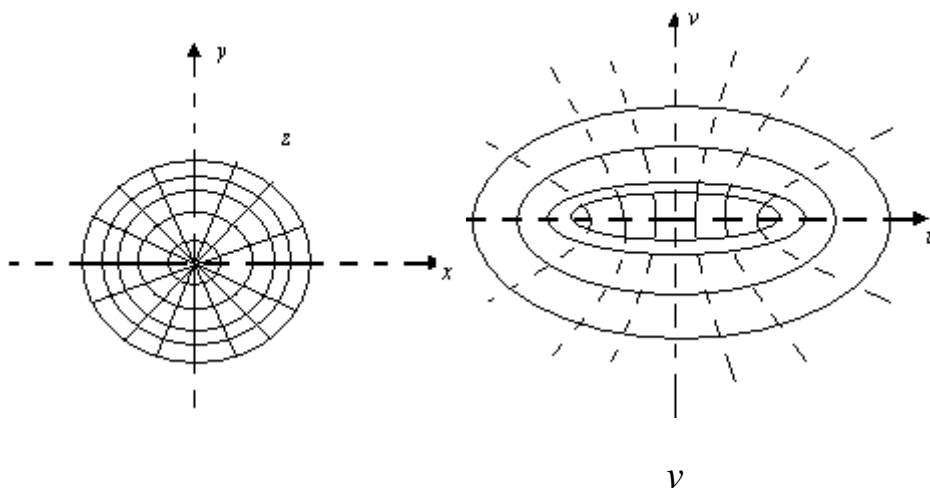
Бул функция  $z$  тегиздигинин бирдик тегерегин ички чекиттеринин көптүктөрүн ( $|z| < 1$ ) да, сырткы чекиттерин көптүктөрүн ( $|z| > 1$ ) да,  $w$  тегиздигинин чыныгы огундагы  $[-1 ; 1]$  сегментинде жатпаган чекиттердин көптүгүнө өз ара бир маанилүү чагылтат. Мында областтын чеги, б.а.  $|z| = 1$  айланасы  $[-1 ; 1]$  сегментине чагылтылат.

Жуковскийдин функциясы жогорку  $|z| < 1, \text{Im } z > 0$  жарым тегерегин  $\text{Im } w < 0$  жарым тегиздигине чагылтат жана төмөнкү

$|z| < 1, \text{Im } z < 0$  жарым тегерегин жогорку  $\text{Im } w > 0$  жарым тегиздигине чагылдырат. Ал эми  $|z| > 1, \text{Im } z > 0$  областын жогорку

$Im w > 0$  жарым тегиздигине чагылдырат жана  $|z| > 1$ ,  $Im w < 0$  областын төмөнкү  $Im w < 0$  жарым тегиздигине чагылдырат.

Жуковскийдин функциясы  $z$  тегиздигиндеги борбору координат башталмасы болгон айланаларын курамын ( $|z| = r_0$ ,  $r_0 \neq 1$ )  $w$  тегиздигиндеги фокустары  $(-1,0)$  жана  $(1;0)$  чекиттери болгон эллипстердин курамына чагылдырат (17.26 – чийме).



17.26 - чийме

Мында Жуковскийдин функциясы менен аныкталган чагылдырууда  $z$  тегиздигинин  $arg z = \varphi_0$  радиустарын, фокустары  $(-1, 0)$  жана  $(1; 0)$  болгон гиперболанын бөлүктөрүнө чагылдырат (17.26 – чийме).

Жогоруда баяндалгандарды мисалдардын жардамы менен бекемдейли.

**1.**  $w = 2z + 1$  функциясы менен чагылдыруудагы  $z$  тегиздигинин  $x^2 + y^2 = 1$  айланасын  $w$  тегиздигиндеги чагылдыруусун көрсөткүлө.

**Чыгаруу.** ► Сызыктуу функция айлананы айланага чагылдырат.

$w' = 2 > 1$  болгондуктан, бул чагылтуу кеңейтет.

$$w = 2z + 1 = 2(x + iy) + 1 = 2x + 1 + 2yi$$

болгондуктан 
$$\begin{cases} 2x+1 = u, \\ 2y = v \end{cases} \text{ болот.}$$

Мындан  $x = \frac{u-1}{2}$ ,  $y = \frac{v}{2}$  ни алабыз. Аны, айлананын теңдемесине коюп  $(u-1)^2 + v^2 = 4$

теңдемесин алабыз. Демек, биз издеген айлана радиусу 2 ге барабар, борбору  $M(1; 0)$  чекити болгон айлана болот (17.27 – чийме). ◀

## 2. $w = z^2$ функциясы

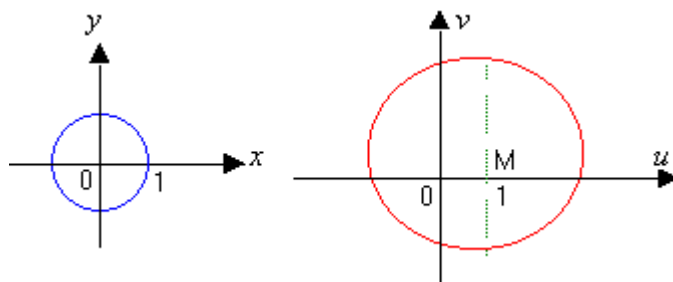
$z$  тегиздигин

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

квадраттын,  $w$  тегиздигин

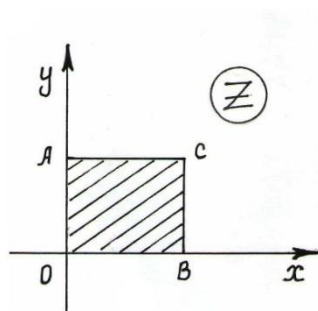
кандай областына чагылдырат?

17.27 – чийме

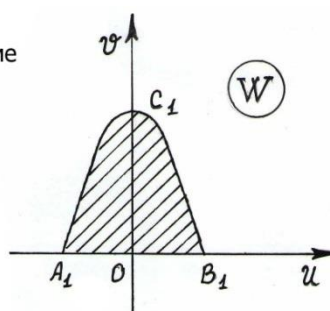


**Чыгаруу.** ▶  $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

болгондуктан  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$



17.28-чийме



Берилген квадраттын чокуларын түспөлдөрүн табалы (17.28 – чийме).

Эгерде:  $x = 0, y = 0$  болсо,  $u = 0, v = 0$  болот;

$x = 0, y = 1$  болсо,  $u = -1, v = 0$  болот;

$x = 1, y = 0$  болсо,  $u = 1, v = 0$  болот;

$x = 1, y = 1$  болсо,  $u = 0, v = 2$  болот;

Эми  $z$  тегиздигиндеги берилген квадраттын жактарын  $w$  тегиздигиндеги чагылуу сызыктарын табалы:

$OB$ :  $y = 0, u = x^2, v = 0$ , демек  $v = 0, u \geq 0$ . Бул  $O$   $u$  - огуна

$OB_1$  кесиндиси болот.

$OA$ :  $x = 0, u = -y^2, v = 0$ , демек  $v = 0, u \leq 0$ . Бул болсо,  $O$   $u$  - огуна

$OA_1$  кесиндиси болот.

AC :  $y = 1, u = x^2 - 1, v = 2x$ . Мындан  $u = \frac{v^2}{4} - 1$  ди алабыз. Бул ийри сызык  $A_1(-1, 0)$  жана  $C_1(0, 2)$  чекиттерин бириктирген параболанын жаасы болот.

BC :  $x = 1, u = 1 - y^2, v = 2y$ . Мындан  $u = 1 - \frac{v^2}{4}$  параболасын алабыз. Бизге керектүүсү бул параболанын  $B_1(1, 0)$  жана  $C_1(0, 2)$  чекиттерин бириктирген бөлүгү болот.

Демек,  $z$  тегиздигиндеги  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  квадратын

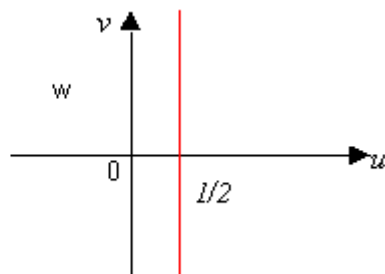
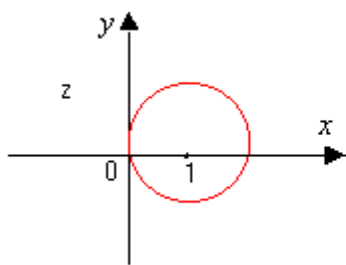
$w = z^2$  чагылдыруусу менен аныкталган чагылуусу,  $w$  тегиздигин

$v \geq 0$  жарым тегиздигиндеги  $v = 0, u = \frac{v^2}{4} - 1, u = 1 - \frac{v^2}{4}$  сызыктары менен чектелген область болот (17.28 – чийме). ◀

3.  $x^2 + y^2 = 2x$  айланасын  $w = \frac{1}{z}$  чагылдыруусундагы элесин тапкыла.

**Чыгаруу.** ▶  $w = \frac{1}{z}$  функциясы бөлчөктүү – сызыктуу функциянын айрым учуру.  $z = x + iy$  жана  $\bar{z} = x - iy$  болгондуктан

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{жана} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$



болот. Буларды берилген айлананын теңдемесине койсок,

$$\frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 = z + \bar{z}$$

же  $z \cdot \bar{z} - (z - \bar{z}) = 0$  теңдемесине ээ болобуз.

17.29 – чийме

Бул акыркы теңдемеге,  $z = \frac{1}{w}$  жана  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$

тескери туюнтууларын коюп



$$\frac{1}{w \cdot \bar{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = 0 \quad \text{же} \quad \frac{1}{w \cdot \bar{w}} - \frac{w + \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = 0$$

барабардыгын алабыз. Мындан

$$w + \bar{w} = 1$$

келип чыгат. Бул барабардыкта  $w = u + i v$  жана  $\bar{w} = u - i v$

экендигин эске алсак, анда  $2u = 1$  же  $u = \frac{1}{2}$  болот.

Демек,  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  айланасы  $w$  тегиздигин ордината огуна параллель болгон  $u = \frac{1}{2}$  түз сызыгына чагылдырылат (17.29 – чийме).



**4.**  $w = i z + 1$  чагылдыруусундагы  $z$  тегиздиздигин координата окторунун  $w$  тегиздигиндеги элесин тапкыла.

**Чыгаруу.** ▶  $w = i z + 1$  – сызыктуу функция. Ошондуктан түз сызыктын элеси да түз сызык болот. Берилген функциянын чын жана жалган бөлүктөргө бөлүп

$$w = u + i v = i(x + i y) + 1 = 1 - y + x i,$$

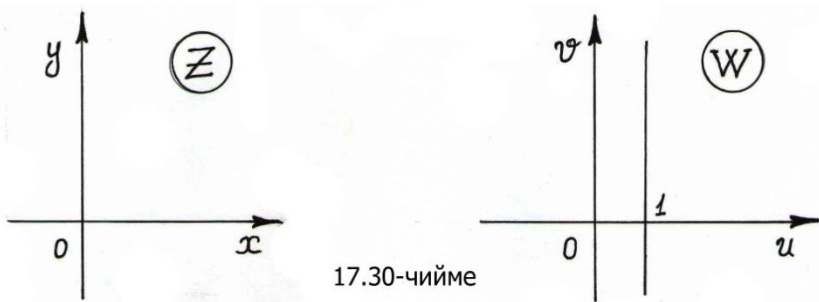
$$u = 1 - y \quad \text{жана} \quad v = x$$

жазалы.

$Ox$  – огуна теңдемеси  $y = 0$ .

Анын элесин теңдемеси  $u = 1$ , бул ордината огуна

параллель түз сызык, болот.



Ал эми  $Oy$  – огуна теңдемеси  $x = 0$ . Анын элесин теңдемеси  $v = 0$ . Бул абсцисса огуна теңдемеси. Демек,  $w$  тегиздигиндеги  $w = i z + 1$  чагылтуусуна туура келген  $z$  тегиздигин координат окторунун элестери:  $u = 1, v = 0$  (17.30 – чийме) болот. ◀

5. Жуковскийдин функциясы  $z$  тегиздигин  $|z| < 1$ ,  $Im z > 0$  жарым тегерегин,  $w$  тегиздигин төмөнкү жарым тегиздигине чагылтарын көрсөткүлө.

**Чыгаруу.**► Жуковскийдин  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  функциясы  $z$  тегиздигин  $|z| < 1$  – бирдик тегергинин ички чекиттерин,  $w$  тегиздигиндеги  $Im w = 0$ ,  $|Re w| \leq 1$  кесиндисин сырткы чекиттерине чагылдырат. Ошондой эле  $z = e^{i\varphi}$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) айлананасын жаасын

$$w = \frac{1}{2} \left( e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos \varphi,$$

( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) кесиндисине чагылдырат. Бул кесинди,  $Im w = 0$  түз сызыгынын  $[-1, 1]$  сегменти болот.

Жуковскийдин функциясы  $z$  тегиздигин чыныгы огун ( $z \neq 0$ )  $w$  тегиздигин чыныгы огуна чагылдырат. Ошондой эле  $z$  тегиздигиндеги чыныгы октун  $[-1; 0) \cup (0; 1]$  бөлүгүн,  $w$  тегиздигин

$$Im w = 0, Re w \leq -1 \text{ жана } Im w = 0, Re w \geq 1$$

эки шоолаларын биригүүсүнө өз ара бир маанилүү чагылдырат. Ошол себептүү, эгерде  $z \rightarrow 0$  болсо, анда  $w \rightarrow \infty$  болот, ал эми  $z \rightarrow \pm 1$

( $|z| < 1$ ) болсо, анда  $w \rightarrow \pm 1$  болот.

Демек,  $|z| < 1$ ,  $Im z > 0$  – жарым тегерегин чеги,  $w$  тегиздигин чыныгы огуна, б.а.  $Im w = 0$  огуна чагылдырылат. Мында тегеректин  $AB$  диаметри  $w$  тегиздигин чыныгы огунун

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  областына чагылдырылат.

$$z = \frac{i}{2} \text{ - чекити } w = \frac{1}{2} \left( \frac{i}{2} + \frac{1}{\frac{i}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{i}{2} + \frac{2}{i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{i}{2} - 2i \right) = -\frac{3}{4}i \text{ чекитине}$$

чагылдырылат.

Бул берилген жарым тегерек  $(-\infty, -1]$  жана  $[1, +\infty)$  аралыктары боюнча кесилген төмөнкү жарым тегиздикке чагылдырылат

(17.31 – чийме). ◀

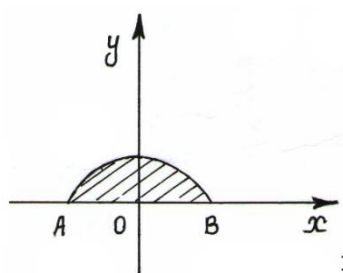
V.  $w = e^z$  – экспонента ( $\exp(z)$ ) функциясы комплекстик тегиздиктин бардык  $z = x + iy$  чекиттеринде аныкталып, Эйлердин

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (18)$$

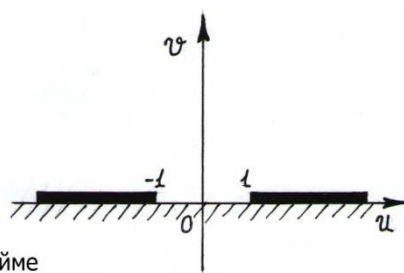
формуласын жардамы менен

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y \quad (19)$$

чыныгы жана жалган бөлүктөргө ажыратылып жазылат.



17.31-чийме



Экспонента

$w = e^z$  функциясын негизги касиеттерин көрсөтөлү:

1)  $y = 0$  болсо, чыныгы

өзгөрүлмөлүү  $w = e^z = e^{x+i0} = e^x$  функциясына айланат.

2)  $w = e^z$  функциясы бүтүндөй комплекстик тегиздикте аналитикалык жана туундусу кадимки  $(e^z)' = e^z$  эрежеси боюнча эсептелет.

3)  $w = e^z$  функциясы үчүн негиздери бирдей даражаларды көбөйтүү  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  эрежеси сакталат.

Чынында эле (18) жазуу эрежесин пайдаланып

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= (e^{x_1} \cos y_1 + i e^{x_1} \sin y_1) \cdot (e^{x_2} \cos y_2 + i e^{x_2} \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

бул касиеттин туура болорун текшерүүгө болот.

4)  $w = e^z$  негизги мезгили  $T = 2\pi i$  жалган бирдиги болгон функция.

Чынында эле каалагандай  $k$  бүтүн санын алсак да  $T = 2\pi k i$  саны мезгил болорун

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi k i} &= e^z \cdot e^{2\pi k i} = e^z \cdot [\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k] = \\ &= e^z \cdot 1 = e^z \end{aligned}$$

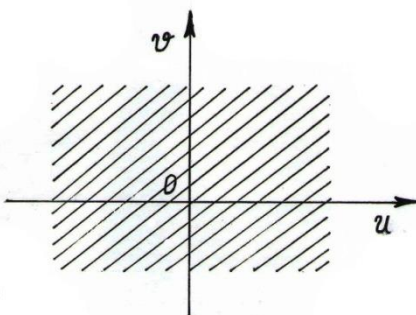
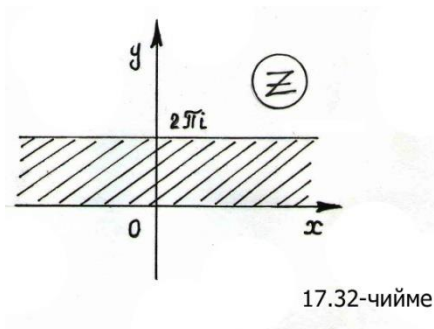
көрсөтүүгө болот.

Демек, функция  $Oy$  – жалган огуна карата  $2\pi k i$  сандары менен бөлүнгөн тилкечелерди бир маанилүү чагылтат. Чынында эле, эгерде эки башка  $z_1, z_2$  чекиттерине функциянын бир эле  $w$  мааниси туура келет десек, анда (19) жазылыштан

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \cos y_1 = \cos y_2 \wedge \sin y_1 = \sin y_2$$

келип чыгып,  $x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 2\pi k$  теңдештиктерине ээ болобуз. Мындан  $z_2 - z_1 = 2\pi k i$  келип чыгып  $z_1, z_2$  комплекстик сандары  $Oy$  – жалган огу боюнча кендиги  $2\pi$  болгон ар башка  $k$  тилкечелеринде гана ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) жайгашышы мүмкүн экендигин көрөбүз.

Мисалы  $k = 0$  болгондо,  $z$  тегиздигинде пайда болгон  $0 < y < 2\pi$



тилкесинде  $w = e^z$  функциясы бир бетүү (бир маанилүү), аналитикалык жана  $(e^z)' \neq 0$  болгондуктан, тилкени бүтүндөй  $w$  тегиздигине конформдуу чагылтат

(17.32 – чийме).

## VI. Логарифмалык функция.

$z = e^w$  теңдемесинде  $z = x + i y$  белгилүү ( $z \neq 0$ ), ал эми

$w = u + i v$  белгисиз чоңдуктар болушуп,

$|z| = e^u, \text{Arg } z = v + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  көрүнүштөрдө эсептелишет. Мындан белгисиздерди

$u = \ln|z|, v = \text{Arg } z$  көрүнүштө табууга болот.

Ошентип, бардык  $z \neq 0$  чекиттеринде  $w = e^z$  функциясына тескери болгон

$w = \ln|z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

функцияны аныктоого болот. Бул алынган  $k$  бүтүн санына жараша маанилери өзгөргөн көп маанилүү функция логарифмалык функция деп аталып,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

символу менен белгиленет.  $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2\pi k$  көрүнүштө болгондуктан,  $k = 0$  болгон алгачкы айлампада каралган комплекстик сандар үчүн, логарифмалык функциянын **башкы бөлүгүн**

$\ln z = \ln z + i \operatorname{arg} z$  көрүнүштө жазып, жалпы учурда логарифмалык функцияны

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

символу менен белгилеп коюуга болот. Ошентип логарифмалык функция, ар бир  $k$  нын турактуу маанисинде  $z \neq 0$  болгон чекиттерде бир беттүү (бир маанилүү) жана аналитикалык функция болуп, конформдуу чагылтууну ишке ашырат.

## VI. Тригонометриялык жана гиперболалык функциялар.

у чыныгы саны үчүн Эйлердин формуласын

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

көрүнүштөрдө жазып, аларды мүчөлөп кошуп жана кемитип

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{туюнтууларына ээ болобуз.}$$

Бул туюнтууларын пайдаланып, комплекстик өзгөрүлмөлүү синус жана косинус функцияларын экспонента функцияларын суперпозициясы катарында

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (21)$$

жазууга болот.

Комплекстик өзгөрүлмөлүү  $\sin z$  жана  $\cos z$  функцияларын айрым касиеттерин санап өтөлү:

- 1) Жалган бөлүгү  $y = 0$  болсо, анда  $z = x$  болуп кадимки чыныгы өзгөрүлмөлүү синус жана косинус функциялары келип чыгат;
- 2) Бүтүндөй комплекстик тегиздикте аналитикалык болушат;
- 3) Туундулары чыныгы өзгөрүлмөлүү функциялар сыяктуу

$(\sin z)' = \cos z$   $(\cos z)' = -\sin z$  эсептелишет;

4)  $T = 2\pi$  мезгилдүү функциялар болушат;

5)  $\sin z$  – так, ал эми  $\cos z$  – жуп функциялар;

6) Чыныгы өзгөрүлмөлүү тригонометриялык функциялардагы тиешелештиктер сакталышат.

Бул касиеттер (21) жазылуу эрежелерин жардамы менен далилденет.

Ошондой эле тангенс жана котангенс функциялары

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

көрүнүштөрдө, ал эми гиперболалык функциялар

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (22)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

көрүнүштөрдө аныкталышат.

Тригонометриялык жана гиперболалык функциялардын 17.1.3 – темасында көрсөтүлгөн 1) – 8) байланыштары, алардын (21), (22) көрүнүштөрдөгү жазылыштарынан келип чыгат.

Ошондой эле аларды чыныгы жана жалган бөлүктөргө ажыратуу, модулу эсептөө да 1) – 6) касиеттерге жана (21), (22) формулаларга таянуу менен жүргүзүлөт. Мисал катары алардын айрымдарын

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) =$$

$$= \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) =$$

$$= \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$|\sin z|^2 = (\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2,$$

$$|\cos z|^2 = (\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2 \quad \text{эсептеп көрсөтөлү.}$$

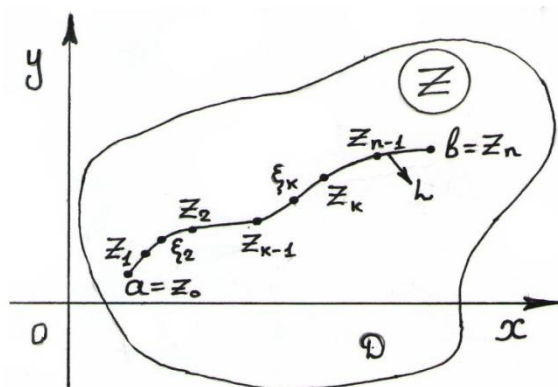
Эгерде  $x = 0$  десек  $|\sin z| = |\operatorname{sh} y|$ ,  $|\cos z| = |\operatorname{ch} y|$  байланыштары келип чыгат.

Мисал. Эсептегиле  $\cos[i(5 \pm 2\sqrt{6})] = \operatorname{ch} [\ln(5 \pm 2\sqrt{6})] =$   
 $= \frac{e^{\ln(5+2\sqrt{6})} + e^{\ln(5-2\sqrt{6})}}{2} = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6}) = 5.$

## § 17.4 Комплексдик өзгөрүлмөлөр боюнча интегралдоо. Кошинин теоремасы. Кошинин интегралдык формуласы

### 17.4.1 Комплексдик өзгөрүлмөлүү функциядан ийри боюнча алынган интеграл

$z$  комплексдик тегиздигине жайгашкан  $D$  областында  $a$  чекитинде башталып  $b$  чекитинде бүткөн, багыты белгилүү бөлүкчө – жылмакай  $L$



17.33-чийме

ийриси берилип, ийринин чекиттеринде  $w = f(z)$  функциясы аныкталсын дейли.  $L$  ийрисин

$a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = b$  чекиттери менен  $n$  сандагы бөлүкчө жаачаларга бөлүп, ар бир  $k$  – бөлүкчө жаачалардын ичинен эркин абалда бирден  $\xi_k$  чекиттерин алалы ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).  $k$  – бөлүкчө жаачанын узундугу  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  болсун (17.33 – чийме). Алардын эң узунун (модулунун чоңун)  $\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| = \lambda$

деп,  $L$  ийрисин чекиттери боюнча  $f(z)$  функциясына карата түзүлгөн интегралдык сумма деп аталуучу

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (23)$$

сумманы түзөлү.

**17.10 Аныктама.** Эгерде  $L$  ийрисин кандай ыкма менен бөлүкчө жаачаларга бөлгөнүбүзгө жана ал бөлүкчөлөрдүн кайсы жеринен  $\xi_k$

чекиттерин алганыбызга көз каранды болбостон,  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$

умтулгандагы (23) интегралдык суммасынын предели жашаса, анда пределин маанисин  $f(z)$  функциясынан  $L$  ийриси боюнча алынган интеграл деп атап, символикалык түрдө

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k = \int_L f(z) dz \quad (24)$$

көрүнүштө белгилеп жазабыз.

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z_k = x_k + i y_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \xi_k = \zeta_k + i \eta_k, \quad u_k = u(\zeta_k, \eta_k), \quad v_k = v(\zeta_k, \eta_k)$$

маанилерин (23) кө коюп, аны чыныгы жана жалган

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$$

бөлүктөргө ажыратып жазып пределиге өтсөк, (24) пределин мааниси

$$\int_L u dx - v dy - \text{чыныгы}, \quad \int_L v dx + u dy - \text{жалган} \quad (25)$$

бөлүктөрдөн турган  $L$  ийриси боюнча алынган экинчи түрдөгү ийри сызыктуу интегралдардын суммасына барабар болорун көрөбүз.

Ошентип, (24) интегралын жашоо маселеси, чыныгы өзгөрүлмөлүү функциялардан алынуучу (25) ийри сызыктуу интегралдарын жашоосуна байланыштуу болуп,  $L$  ийрисинде бөлүкчө – үзгүлтүксүз жана чектелген  $f(z)$  функциясын (24) интегралы жашап (III – бөлүк, § 16.2 ылайык),

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy \quad (26)$$

$$\text{же } \int_L f(z) dz = \int_L (u + i v) (dx + i dy)$$



формулы менен эсептелет.

Мындан комплекстүү өзгөрүлмөлүү функциядан интеграл алууда, экинчи түрдөгү ийри сызыктуу интегралдарга тиешелүү негизги касиеттердин сакталары келип чыгат.

Жалпы учурда, комплекстик өзгөрүлмөлүү функциянын интегралы, интегралдоо жолунан б.а.  $L$  сызыгынан көз каранды. Ал эми бир байламталуу  $D$  областында аналитикалык болгон  $f(z)$  функциясын интегралы,  $L \in D$  ийри сызыгын формасынан (интегралдоо жолунан) көз каранды эмес жана Ньютон-Лейбництин төмөнкү формуласы аткарылат:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \Phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) \quad (27)$$

Мында  $\Phi(z)$  тин туундусу  $f(z)$  ке барабар, б.а.  $\Phi'(z) = f(z)$ .

Бөлүктөп интегралдоо методу жана интегралдын алдындагы өзгөрмөнү алмаштыруу методу чыныгы анализдеги сыяктуу аткарылат.

### Мисалдар

1.  $L$  ийри сызыгы  $z_0 = 0$  жана  $z_1 = 1 + i$  чекиттерин бириктирген

$x = y^3$  параболасы болсо,  $\int_L z^3 dz$  интегралын эсептегиле.

**Чыгаруу.** ►  $w = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$   
болгондуктан

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$$

болот. Мындан жана (26) дан

$$\int_L z^3 dz = \int_L (x^3 - 3xy^2) dx - (3x^2y - y^3) dy +$$

$$+ i \int_L (3x^2y - y^3) dx + (x^3 - 3xy^2) dy$$

болот. Бул интегралда  $x = y^3$ ,  $dx = 3y^2 dy$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  болгондугун эске алсак

$$\begin{aligned}
\int_L z^3 dz &= \int_0^1 (y^9 - 3y^5) 3y^2 dy - (3y^7 - y^3) dy + \\
&+ i \int_0^1 (3y^7 - y^3) 3y^2 dy + (y^9 - 3y^5) dy = \\
&= \int_0^1 (3y^{11} - 12y^7 + y^3) dy + i \int_0^1 (10y^9 - 6y^5) dy = \\
&= \left( \frac{y^{12}}{4} - \frac{3y^8}{2} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 + i (y^{10} - y^6) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + i(1 - 1) = -1
\end{aligned}$$

болот. ◀

2. Интегралдоо сызыгы  $L$  төмөнкүдөй берилсин:

- a)  $L$  – сызыгы  $z_0 = 0$  жана  $z_1 = 1 - i$  чекиттерин бириктирген түз сызыктын кесиндиси;  
b)  $L$  – сызыгы  $|z| = 2$  айлананын  $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$  болгон жаасы.

Бул шарттарда  $\int_L (z + 2\bar{z}) dz$  интегралын эсептегиле.

**Чыгаруу.** ▶ a)  $w = u + iv = z + 2\bar{z}$  функциясы үчүн  $u = 3x$ ;  
 $v = -y$  болот. Бул учурда

$$\int_L (z + 2\bar{z}) dz = \int_L 3x dx + y dy + i \int_L (-y) dx + 3x dy$$

болот. О жана  $-i+1$  чекиттерин бириктирген түз сызыктын теңдемеси  $y = -x$  болгондуктан,

$$\begin{aligned}
\int_L (z + 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 3x dx + (-x)(-dx) + i \int_0^1 x dx + 3x(-dx) = \\
&= \int_0^1 4x dx + i \int_0^1 (-2x) dx = \frac{4x^2}{2} \Big|_0^1 - 2i \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2 - i \text{ ни алабыз.}
\end{aligned}$$

b)  $|z| = 2$  айлананын берилген жаасынын параметрдик теңдемеси

$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$  формуласы менен аныкталат. Ошол себептүү

$$\begin{aligned}
\int_L (z + 2\bar{z})dz &= \int_L (3x - iy)(dx + i dy) = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\cos t - 2i\sin t)(-2\sin t + i2\cos t)dt = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-12\cos t \sin t + 4\sin t \cos t)dt + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 t + 12\cos^2 t)dt = \\
&= -8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 + 8\cos^2 t)dt = \\
&= -8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 + 4(1 + \cos 2t))dt = \\
&= 0 + i8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + i \frac{4\sin 2t}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi i
\end{aligned}$$

болот. ◀

3.  $\int_1^i ze^z dz$  интегралын эсептегиле.

**Чыгаруу.** ▶  $f(z) = ze^z$  аналитикалык функция болгондуктан, бөлүктөп интегралдоо методун колдонобуз:

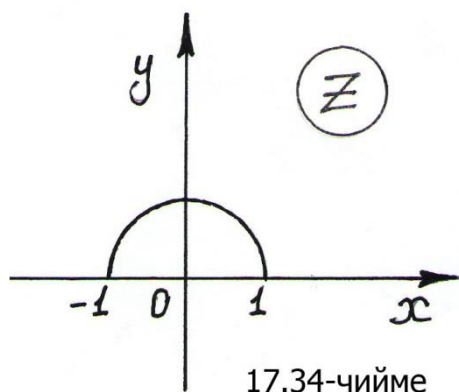
$$\begin{aligned}
\int_1^i ze^z dz &= \left| \begin{array}{l} u = z \quad du = dz \\ dv = e^z dz \quad v = e^z \end{array} \right| = (ze^z) \Big|_1^i - \int_1^i e^z dz = ie^i - e - e^z \Big|_1^i = \\
&= ie^i - e - e^i + e = (i-1)e^i
\end{aligned}$$

болот. ◀

4.  $L$  – ийриси борбору  $z_0$ , радиусу  $r$  болгон саат жебесине каршы багытта алынган айлана болсо, анда

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \text{ болорун көрсөткүлө.}$$

**Чыгаруу.** ►  $L$  ийриси  $z = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  теңдемеси менен берилгенин байкайбыз.  $z'(t) = (z_0 + re^{it})' = ire^{it}$  болгондуктан  $dz = ire^{it} dt$  болуп, интеграл



$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

көрүнүшүндө эсептелет. ◀

**5.**  $L$  ийриси  $|z| = 1$  айланасын  $\sqrt{z}$  тин мааниси  $\sqrt{1} = -1$  боло тургандай жогорку жарым бутагы болсо (17.34 – чийме), анда

$$I = \int_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

интегралын эсептегиле.

**Эсептөө.** ► Көрсөткүчтүү  $z = re^{it}$ ,  $r = 1$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  формада жазып,  $\sqrt{1} = -1$  шартынан  $\sqrt{e^{it}} = e^{i(\frac{t}{2} + \pi)}$  келип чыгарын эске алсак, анда

$$I = \int_L \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{re^{it}}{e^{i(\frac{t}{2} + \pi)}} dt = i \int_0^{\pi} e^{i(\pi - \frac{t}{2})} dt = 2 e^{i(\pi - \frac{t}{2})} \Big|_0^{\pi} = 2(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}) = 2(1 - i). \blacktriangleleft$$

**6.**  $\ln z$  – логарифмдин башкы бөлүгү жана  $\ln 1 = 0$  болсо,  $|z| = 1$  айланасын  $[i, 1]$  жаасы боюнча

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$$

интегралын эсептегиле.

**Эсептөө.** ► Ньютон – Лейбництин (27) формуласын колдонолу:

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \frac{1}{4} \ln^4 z \Big|_1^i = \frac{1}{4} (\ln^4 i - \ln^4 1) = \frac{1}{4} \ln^4 i =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64} \blacktriangleleft$$

## 17.4.2 Кошинин интегралдык формуласы

**17.11 Аныктама.** Эгерде  $D$  областынын чеги жалгыз гана бир туюк формадагы сызык болсо, анда  $D$  областы **бир байланыштуу (бир байламталуу) область** деп аталат.

**17.3 Теорема.** (Кошинин теоремасы). Айталы туюк формадагы түздөлүүчү  $L$  ийриси менен чектелген, бир байланыштуу  $D$  областында  $f(z)$  функциясы аналитикалык болсун, анда

$$\int_L f(z) dz = 0 \quad (28)$$

болот.

**Далилдөө.** ►  $f(z)$  функциясы жабык (туюк)  $\bar{D}$  областында аналитикалык функция болсо, анын  $\operatorname{Re}$  жана  $\operatorname{Im}$  бөлүктөрү б.а.  $u(x, y)$  жана  $v(x, y)$  функциялары Коши – Римандын (12) – чи

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$  шарттарына баш ийет. Мындан жана ийри сызыктуу интегралдын негизги теоремасы болгон Гриндин 16.3 – теоремасынан (III – бөлүк, § 16.2)

$$\int_L f(z) dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy = 0$$

(28) формуласын аткарылары келип чыгып, теорема далилденет. ◀

Көп байламталуу областтар, байланыш ийрилери жардамы менен бир байламталуу областтарга келтирилгендиктен (III – бөлүк, §16.2), Кошинин теоремасы көп байламталуу областтар үчүн да туура болот.

**17.4 Теорема.** Айталы  $D$  областында  $f(z)$  функциясы аналитикалык болуп,  $\bar{D}$  жабык (туюк) областында үзгүлтүксүз болсун. Анда  $D$

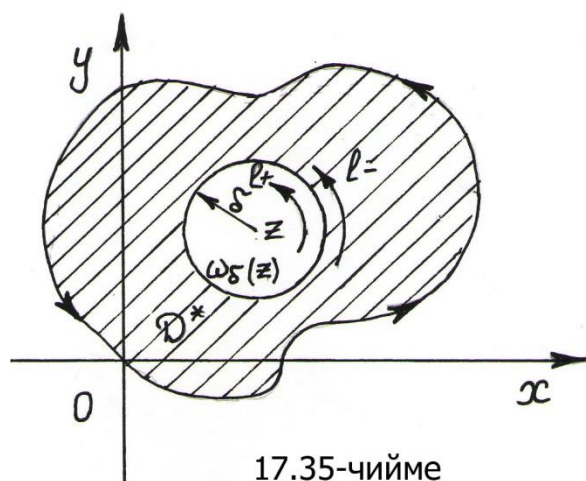
областын ар бир ички  $z$  чекиттеринде Кошинини интегралдык формуласы деп аталган

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (29)$$

теңдештиги орун алат. Мында  $L$  – ийриси  $D$  областын оң багытта алынган чек ара сызыгы ( $D$  областын чеги).

Ошентип  $D$  областын эркин алынган ар бир ички  $z$  чекиттериндеги  $f(z)$  функциясын мааниси, анын чек ара сызыгындагы  $f(\xi)$  маанилери менен (29) формуласы аркылуу байланышкан болот ( $\xi \in L$ ).

**Далилдөө.** ►  $D$  областын каалаган бир жеринен турактууга окшоп кыймылы токтотулган (фиксирленген)  $z$  чекитин алып, борбору  $z$  чекити, радиусу  $r = \delta$  болгон  $\omega_\delta(z)$  – тегерегин түзөлү (17.35 – чийме),



17.35-чийме

тегеректин чегин  $|\xi - z| = \delta$  теңдемеси менен берилген  $l$  айланасы дейли. Эгерде түзүлгөн тегеректи  $D$  областынан чыгарып (кыркып) салсак, анда  $D$  областын калган  $D/\omega_\delta(z) = D^*$  бөлүгүндө интеграл алдындагы  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  функциясын алымы менен бөлүмү  $\xi$  өзгөрүлмөсүнө карата аналитикалык болушуп, бөлүмү да

нөлдөн айырмалуу болот. Ошондуктан  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  функциясын  $D^*$  областында аналитикалык жана  $\overline{D^*}$  жабык (туюк) областында үзгүлтүксүз функция деп эсептөөгө болот. Андай болсо, жогорудагы 17.3 – теореманын негизинде  $D^*$  областын чектеп турган туюк формадагы  $L, l$  ийрилери боюнча  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  функциясынан алынган интегралдар үчүн (28) теңдештиги

$$\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0, \quad \int_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

аткарылат. Мындан  $D^*$  областын жалпы  $\Gamma = L + l_-$  чек арасы боюнча алынган интегралдан

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \equiv \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{l_-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \text{ же}$$

$$\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{l_-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \text{ же } \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \int_{l_-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (30)$$

теңдештиги келип чыгат. Анткени  $l$  ийрисин бойлоп басканда  $\omega_{\delta}(z)$  тегереги (областы) сол жакта кала тургандай оң  $l_+$  багыт,  $D^*$  областы үчүн терс  $l_-$  багыт болот, себеби мындай бойлоодо  $D^*$  областы оң жакта жайгашат. Ошондуктан интегралдоо багытын өзгөртсөк, интегралдын белгиси карама – каршы белгиге өзгөрөт.

Жогоруда каралган 4 – мисалдагы эсептөө көрсөткөндөй  $|\xi - z| = r$  теңдемеси менен берилген  $l_+$  айланасы боюнча (оң багытта) алынган интеграл үчүн,

$$\int_{l_+} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i \quad (31)$$

теңдештиги орун алат ( $\xi \in l_+$  жана анын мааниси айлананын  $r$  радиусунан көз каранды болбойт). Ошондуктан  $f(z)$  ти

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (32)$$

көрүнүштө жазууга болот деп болжолдоп, (30) теңдештигин эки жагын тең  $2\pi i$  ге бөлүп жибергенден кийин (32) ни эске алуу менен, далилдөөнү талап кылган

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$$

Кошинин (29) формуласын аткарыларын же теореманын далилденерин көрөбүз. Бирок  $f(z)$  функциясын (32) көрүнүштө болжолдоп жазуу туура болобу? – деген суроо туулат.

(32) интегралын мааниси  $r = \delta$  радиусунан көз каранды эмес, ошондуктан  $\delta$  жетишерлик кичине болсо деле (32) теңдештиги бузулбайт. Теореманын шарты боюнча  $f(z)$  функциясы  $\bar{D}$  жабык областында үзгүлтүксүз, ошондуктан аргументтердин жетишерлик

$|\xi - z| < \delta$  жакын маанилерине функциянын да жетишерлик жакын  $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$  маанилери тиешелеш коюлат, б.а. функциянын  $|\xi - z| = \delta$  айланасындагы  $\xi$  чекиттериндеги маанилери менен, айлананын борборундагы  $z$  чекитиндеги мааниси  $f(\xi) \approx f(z)$  жакындаштырып алганда барабар болушат. Андай болсо, (32) интегралында  $f(\xi)$  ни турактуу  $f(z)$  менен алмаштырып (31) ди эске алуу менен, жакындаштырылган

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot \int_{l_+} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z)$$

теңдештиги орун аларын көрөбүз. Демек, көңүлгө албаган каталыкка жол берүү менен  $f(z)$  функциясын (32) көрүнүштө жазууга болот деген тыянакка келебиз. ◀

Жалпы учурда радиусу  $r$ , борбору  $z$  болгон  $L$ :  $|\xi - z| = r$  – айланасы үчүн, анын  $\xi - z = re^{i\theta}$  көрсөткүчтүү жазылышын колдонуп, Кошинин формуласынан

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d(z + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(z + re^{i\theta}) d\theta,$$

же орточо маанилердин формуласы деп аталган

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(z + re^{i\theta}) d\theta \quad (33)$$

формулананы келтирип чыгарабыз.

**Жыйынтык.**  $f(z)$  функциясы жабык (туюк) тегеректе үзгүлтүксүз жана тегеректин ар бир ички чекиттеринде аналитикалык болсо, анда



$f(z)$  функциясын тегеректин борборундагы мааниси, аны чектеп турган айланалардагы маанилердин орточосуна барабар болот.

### 17.4.3 Аналитикалык функциялардын бардык тартиптеги туундуларын жашашы

**17.5 Теорема.** Айталы  $f(z)$  функциясы  $D$  областында

аналитикалык, ал эми  $\bar{D}$  – жабык областында үзгүлтүксүз болсун. Анда  $D$  областын ар бир  $z$  чекитинде  $f(z)$  функциясынын каалаган тартиптеги туундулары жашап,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (34)$$

Кошинин экинчи бир интегралдык формуласы менен эсептелишет.

Мында туюк формадагы  $L$ -ийриси  $D$  областын чеги, ал эми  $n = 1, 2, 3, \dots$  – туундулардын тартиби.

Адегенде теореманы  $n = 1$  болгон учурда туура болорун көрсөтөлү. Ал үчүн туунду алуунун

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

эрежесине таянабыз. Предел алдындагы айырмага  $z$  жана  $z + h$  чекиттеринде Кошинин (29) формуласын колдонуп,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot [f(z+h) - f(z)] = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - (z+h)} d\xi - \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi \end{aligned}$$

теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү. Мындан  $h \rightarrow 0$  умтулганда  $L$  ийрисиндеги бардык  $\xi$  чекиттеринде  $\frac{1}{\xi - z - h} \rightarrow \frac{1}{\xi - z}$  умтулуусу бир калыпта ишке ашкандыктан,  $n = 1$  болгондо (34) формуласы

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

аткарылат. (34) формуласын математикалык индукция усулун жардамы менен жалпы  $n$  – тартиптеги туундулар үчүн жайылтууга болот. Ошондай эле  $z$  параметри боюнча (29) теңдештигинен  $n$  жолу туунду алуу менен да (34) формуласын далилдесе болот.

### Мисалдар

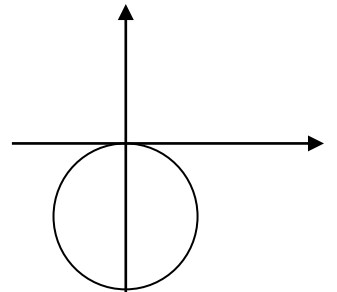
7.  $L$  – туюк сызыгы  $x^2 + y^2 + 2y = 0$  айланасы болсо,

$$\int_L \frac{sh \frac{\pi}{4} z}{z^2 + 1} dz \text{ интегралын эсептегиле.}$$

**Чыгаруу.** ► Берилген айлананын теңдемесин  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$  түрүндө жазабыз. Бул болсо, радиусу 1 ге барабар жана борбору

$z = -i$  чекити болгон айлана (17.36 – чийме). Анда (29) ду колдонуп,

$$\left( \frac{sh \frac{\pi}{4} z}{z - i} \right)_{z=-i} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{sh \frac{\pi}{4} z}{z - i} \frac{1}{z + i} dz \quad \text{17.36 – чийме}$$



х формуласын алабыз. Мындан

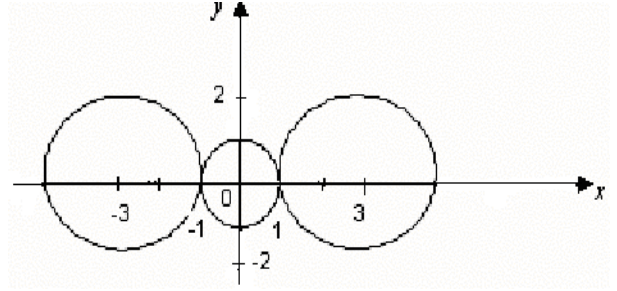
$$\begin{aligned} \oint_L \frac{sh \frac{\pi}{4} z}{z^2 + 1} dz &= 2\pi i \left( \frac{sh \frac{\pi}{4} z}{z - i} \right)_{z=-i} = 2\pi i \frac{sh(-\frac{\pi}{4} i)}{-2i} = \\ &= \pi \frac{e^{\frac{\pi}{4} i} - e^{-\frac{\pi}{4} i}}{2} = \pi i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i \text{ келип чыгат. } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8.  $L$  сызыгы төмөндөгү

a)  $|z - 3| = 2$ ;    b)  $|z + 3| = 2$ ;

с)  $|z| = 1$

айланалар болгондо,  $\oint_L \frac{e^z}{z^2 - 9} dz$   
интегралын эсептегиле (17.37 – чийме).



**Чыгаруу.** ►

а)  $f(z) = \frac{e^z}{z+3}$  функциясы  $|z - 3| = 2$  айланасын ичинде аналитикалык функция. Демек (29) дан

$$\oint_L \frac{e^z}{z^2 - 9} dz = \oint_L \frac{e^z}{z+3} \frac{dz}{z-3} = 2\pi i \left( \frac{e^z}{z+3} \right)_{z=3} = \frac{e^3 \pi}{3} i$$

болот.

б)  $f(z) = \frac{e^z}{z-3}$  функциясы  $|z + 3| = 2$  айлананын ичинде аналитикалык функция. Мындан жана (29) дан

$$\oint_L \frac{e^z}{z^2 - 9} dz = \oint_L \frac{e^z}{z-3} \frac{dz}{z+3} = 2\pi i \left( \frac{e^z}{z-3} \right)_{z=-3} = \frac{-\pi i}{3e^3}$$

болот. ◀

**9.** L сызыгы  $|z| = 2$  теңдемеси менен берилсе,

$$\oint_L \frac{z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3} dz$$

интегралын эсептегиле.

**Чыгаруу.** ►  $|z| \leq 2$  айлананын ичинде  $f(z) = z \cos z$  аналитикалык функция,  $z_0 = \frac{\pi}{3}$  чекити болсо айлананын ичинде жатат. Демек, мында (34) формуланы  $n = 2$  болгон учурда колдонууга болот:

$$(z \cos z)_{z=\frac{\pi}{3}}' = \frac{2!}{2\pi i} \oint_L \frac{z \cos z}{(z - \frac{\pi}{3})^3} dz,$$

МЫНДАН

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{z \cos z}{(z - \frac{\pi}{3})^3} dz &= \pi i (\cos z - z \sin z)'_{z=\frac{\pi}{3}} = \\ &= \pi i (-\sin z - \sin z - z \cos z)_{z=\frac{\pi}{3}} = -\pi i \left( 2 \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= -\pi i \left( 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6} (6\sqrt{3} + \pi) i \end{aligned}$$

келип чыгат. ◀

## 4 – КӨНҮГҮҮЛӨР

1)  $L : \begin{cases} |z|=1 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{cases}$  болсо  $\int_L z \cdot \bar{z} dz$  интегралын эсептегиле (Жообу: -

2).

2)  $\int_L (2 - 3z + z^2) dz$  интегралын

$L : \begin{cases} |z|=2 \\ -\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$  жаасы үчүн эсептегиле (Жообу:  $-2i\sqrt{3}$ ).

3)  $\int_L |z| dz$  интегралын L сызыгы

a)  $z = 0$  жана  $z = 2 + i$  чекиттерин туташтырган түз сызыктын кесиндиси болгондо,

b)  $\begin{cases} |z|=3 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{cases}$  жарым айланасы болгондо,

c)  $|z|=2$  айланасы болгондо эсептегиле. (Жооптору: a)  $\frac{2+i}{2}\sqrt{5}$ ;

b):  $-18$ ; c):  $0$ )

4) Кошиин теоремасын колдонуп,  $\int_L \frac{e^{-z}}{z + \pi i} dz$  интегралын эсептегиле.

Мында  $L$  сызыгы

a)  $|z| = 6$  айланасы;

b)  $|z + 2i| = \frac{1}{2}$  айланасы. (Жооптору: a):  $-2\pi i$ ; b): 0).

5)  $\oint_L \frac{z^3 + 1}{z^2 + 4} dz$  интегралын  $L$  сызыгы

a)  $|z| = 1$ , b)  $|z + 2i| = 1$ , c)  $|z - 2i| = 1$  айланалары болгондо эсептегиле. (Жооптору: a): 0, b):  $-\frac{\pi}{2} - 4\pi i$ ; c):  $\frac{\pi}{2} - 4\pi i$ ).

## §17.5 Даражалуу катарлар. Тейлордун катарлары

### 17.5.1 Комплекстик катарлар жөнүндө жалпы түшүнүктөр

Мүчөлөрү  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  комплекстик сандары болгон чексиз удаалаштык берилсин. Анда алардан

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad (35)$$

түзүлгөн чексиз суммасын, мүчөлөрү комплекстик сандар болгон катар деп атайбыз. Мында  $\forall k : z_k = x_k + iy_k ; x_k, y_k \in R, k \in N$ . Ал эми

$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, n \in N$  суммасы катардын  $n$  – жекече суммасы деп атлып, алардын  $\{S_n\}$  удаалаштыгы **жекече суммалардан түзүлгөн удаалаштык** деп аталат.

**17.12 Аныктама.** Эгерде  $\{S_n\}$  удаалаштыгы  $n \rightarrow \infty$  умтулганда чектелген  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  пределге ээ болсо, анда (35) катарын **жыйналуучу**, ал эми  $S$  ти ал катардын суммасы деп айтабыз. Жыйналбаган катарды **таралуучу катар** деп айтышат.

Жалпы мүчөсү  $z_n = x_n + iy_n$  болгон жыйналуучу катардын суммасы  $S = A + iB$  болсо, аны

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = A + iB = S$$

деп түшүнөбүз.

(35) катарын жыйналуучу болушу үчүн, анын чыныгы жана жалган бөлүктөрүнөн түзүлгөн чыныгы сандардын

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

катарларынын жыйналуучу болушу зарыл жана жетиштүү шарттар болушат.

Ошондуктан (35) катарын жыйналуучулугун изилдөөдө чыныгы анализдеги салыштыруу теоремаларын, жыйналуучулуктун бардык касиеттерин жана белгилерин (3 – бөлүк, § 14.1, § 14.2) колдонууга болот.

Эгерде

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

катары жыйналуучу болсо, анда (35) катары да жыйналат жана ал **абсолюттуу жыйналуучу** катар деп аталат.

### Мисалдар

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + i \cos n}{n^3}$  катарын жыйналуучулугун

изилдегиле.

**Чыгаруу.** ► Берилген катарды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$  көрүнүштө жазалы. Бул катарларды  $\left| \frac{\sin n}{n^3} \right| < \frac{1}{n^3}$ ,  $\left| \frac{\cos n}{n^3} \right| < \frac{1}{n^3}$  салыштырып жалпы

мүчөсү  $\frac{1}{n^s}$  болгон катар  $s > 1$  болгондо жыйналгандыктан, ар бири абсолюттуу жыйналарын көрөбүз. Анда, бул катарлардын суммасы болгон берилген катар да абсолюттуу жыйналат. ◀

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$  катарын жыйналуучулугун изилдегиле.

**Чыгаруу.** ▶

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{2}\right|^n} = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

болгондуктан, Кошинин белгиси боюнча берилген комплекстик мүчөлүү катар да абсолюттуу жыйналат.

### 17.5.2 Даражалуу катарлар

Комплекстик тегиздикте  $z = x + iy$  комплекстик өзгөрүлмөсү жана берилген турактуу  $z_0$  жана  $c_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) комплекстик сандары аркылуу түзүлгөн

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (36)$$

катарды *даражалуу катар* дейбиз.

$z_0 = 0$  болгон учурда (36) даражалуу катары,

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

көрүнүшүнө келет.

Эгерде комплекстик өзгөрүлмөлүү даражалуу катар  $z$  чекитинде жыйналуучу болсо, анда бул  $z$  чекити катардын **жыйналуу чекити** деп аталат. Ал эми катардын бардык жыйналуу чекиттерин көптүгүн, берилген даражалуу катардын **жыйналуу областы** дейбиз. Даражалуу катар жыйналуу областында бир калыпта жыйналуучу болот.

Ар кандай  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n$  даражалуу катардын жыйналуу областы борбору  $z = z_0$  чекити, радиусу  $R \geq 0$  болгон тегеректи түзөт.

Эгерде  $R = \infty$  болсо, даражалуу катар комплекстик тегиздиктин бардык чекиттеринде жыйналат. Ал эми  $R = 0$  болсо, катар бир гана  $z = z_0$  чекитинде жыйналат.

Даражалуу катар кандайдыр бир радиусу  $R$  болгон тегеректин ичинде абсолюттуу жыйналат, ал эми ал тегеректин сыртында жыйналбайт. Ал эми тегеректин чек арасында болсо, даражалуу катар жыйналышы да же жыйналбай калышы да мүмкүн. Бирок, даражалуу катар чек аранын кандайдыр бир чекитинде абсолюттуу жыйналса, анда бул даражалуу катар чек аранын ар бир чекитинде абсолюттуу жыйналат.

### Мисалдар

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1-i)^n}{2^n (n^2+1)}$  - даражалуу катарын жыйналуу тегерегин тапкыла. Берилген катар  $z = 0$ ,  $z = 3 + i$ ,  $z = 3i$  чекиттеринде жыйналабы?

**Чыгаруу.** ► Даламбердин белгиси боюнча берилген катардын жыйналуучулугунун текшерели:

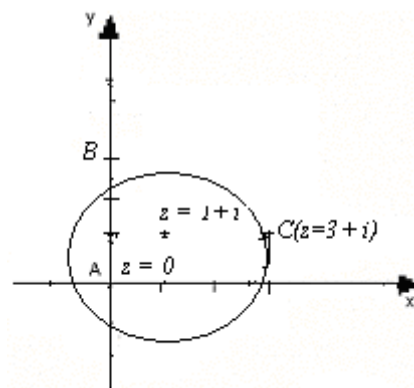
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z-1-i)^{n+1} 2^n (n^2+1)}{2^{n+1} ((n+1)^2+1) (z-1-i)^n} \right| = \quad \text{17.38 - чийме}$$

$$= \frac{|z-1-i|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = \frac{|z-1-i|}{2} < 1.$$

Демек  $|z-1-i| < 2$  - жыйналуу тегереги, ал эми  $R = 2$  - жыйналуу тегерегин радиусу болот. Жыйналуу тегерегин борбору

$z = 1 + i$  чекити (17.38 - чийме).

$z = 0$  (A - чекити) жыйналуу тегерегин ичинде болгондуктан, бул чекитте берилген даражалуу катар абсолюттуу жыйналат.





$z = 3i$  (В чекити) тегеректин сыртында болгондуктан, В чекитинде катар таралат.

$z = 3 + i$  (С - чекити) жыйналуу тегерегин чегинде (чек арасында) жаткандыктан, берилген катардын ал чекиттеги жыйналарын же таралышын изилдейбиз.

$z = 3 + i$  ни берилген даражалуу катарга коюп,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3+i-1-i)^n}{2^n (n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

сандык катарын алабыз. Бул катардын абсолюттук жыйналары көрүнүп турат. ◀

*Эгерде даражалуу катар жыйналуу тегерегин чегинин кандайдыр бир чекитинде таралса, анда ал катар чек аранын калган чекиттеринде таралышы же жыйналышы мүмкүн, б.а. катар чек аранын кээ бир чекиттеринде жыйналышы, ал эми кээ бир чекиттеринде таралышы мүмкүн.*

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7+2-i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}$  - даражалуу катарын

жыйналуу аймагын тапкыла. Бул катардын  $z = 0$ ,  $z = -1 + i$ ,  $z = -2$  чекиттеринде жыйналышын же таралышын изилдегиле.

**Чыгаруу.** ▶ Даламбердин белгисин колдонсок

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2-i)^{n+1} \sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+2)(z+2-i)^n} \right|$$

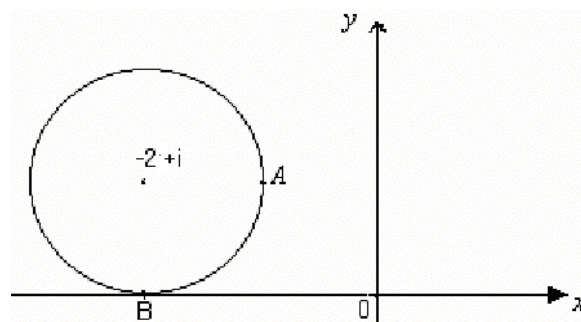
17.39 – чийме

$$= |z+2-i| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+2)} =$$

$$|z+2-i| \cdot 1 = |z+2-i| < 1$$

болот. Демек, жыйналуу аймагын радиусу 1 ге барабар, борбору

$z = -2 + i$  болот (17.39 – чийме).



Мында  $z = 0$  (О чекити) жыйналуу аймагын сыртында жатат.

$z = -1 + i$  (А – чекити) жыйналуу аймагын чегинде жатат  $z = -1 + i$  ни берилген катарга коюп

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+i+2-i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}$$

сандык катарын алабыз. Бул катар таралат. Ал эми  $z = -2$  (В - чекити) тегеректин чегинде жатат.  $z$  тин бул маанисин берилген катарга коюп

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+2-i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)} = \\ &= \frac{-i}{(1+2)} - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)} + \frac{i}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4}(\sqrt{4}+2)} - \frac{i}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}(\sqrt{2n}+2)} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}(\sqrt{2n-1}+2)} \end{aligned}$$

катарын алабыз. Лейбництин белгисин колдонуп, мындагы эки сандык катарларынын тең жыйналарына ынанабыз. Бирок эки катар тең абсолюттуу жыйналуучу катарлар эмес. Демек, берилген даражалуу катар  $z = -2$  чекитинде шарттуу жыйналат.

## 5 - КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү берилген даражалуу катарлардын жыйналуу аймагын тапкыла жана тушунда берилген чекиттерде катардын жыйналышын же таралышын изилдегиле:

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ ;  $z = 1$ ;  $z = 3i$ ;  $z = -2i$  (Жообу:  $|z| < 1$ ; чекиттердин жазылуу, ирети боюнча абсолюттуу жыйналат, таралат, таралат).
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{3n-2} 2^n}$ ;  $z = 0$ ;  $z = \frac{5}{3}$ ;  $z = \frac{i}{2} + 1$  (Жообу:  $|z-1| < \frac{2}{3}$ ;

таралат, таралат, абсолюттуу жыйналат).

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \quad z = 1; \quad z = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad z = \frac{3}{2}.$$

(Жообу:  $|z - 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; таралат, абсолюттуу жыйналат, абсолюттуу жыйналат).

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}; \quad z = 1 + i; \quad z = 2i; \quad z = 0$$

(Жообу:  $|z - 1| < 1$ ; абсолюттуу жыйналат, таралат, абсолюттуу жыйналат).

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n} n^n}{(9n+1)^n}; \quad z = 1; \quad z = 4i; \quad z = -3 + i$$

(Жообу:  $|z - i| < 3$ ; абсолюттуу жыйналат, таралат, таралат).

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{2^n (n+1) \ln(n+1)}; \quad z = 0; \quad z = 2 - 2i; \quad z = 2.$$

(Жообу:  $|z + 2i| < 2$ ; шарттуу жыйналат, таралат, таралат).

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n(n+2)}; \quad z = -2; \quad z = -3 + i; \quad z = -1.$$

(Жообу:  $|z + 3| < 1$ ; абсолюттуу жыйналат, таралат, таралат).

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{2^n}; \quad z = 4i; \quad z = 1 + i; \quad z = 2 + i$$

(Жообу:  $|z - i| < 2$ ; таралат, абсолюттуу жыйналат, таралат)

### МАСЕЛЕЛЕР ( № 4 тапшырма)

Төмөндөгү берилген катарлардын жыйналуу тегерегин жана көрсөтүлгөн чекиттерде катардын жыйналышын же таралышын изилдегиле. Комплекстик тегиздикте жыйналуу тегерегин сызгыла жана берилген чекиттерди көрсөткүлө.

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n (n+1)n^2}; z = 0; z = 2 + 3i; z = 5 - i$
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^{2n}}{n + \sqrt{n}}; z = 0; z = -1 + i; z = -2 - i;$
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}; z = 1 + 2i; z = -4 - i; z = \sqrt{3};$
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{2^{2n} (n + \ln n)}; z = 0; z = 2 + 3i; z = 5 - i;$
- 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i-1)^n}{n(1+\sqrt{n})}; z = 0; z = 1; z = 2 + i;$
- 6)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z+i-1)^n; z = -2 + i; z = 1 - \sqrt{3}i; z = 2 - i;$
- 7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{\sqrt{n}}; z = 0; z = -i; z = 1 + i;$
- 8)  $\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-3+i)^n; z = 2 - i; z = 1 - i; z = 3 - \sqrt{2}i;$
- 9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n(n+1)}; z = 0; z = 1; z = -i;$
- 10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}; z = 3i; z = 0; z = 1 + 2i;$
- 11)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n\sqrt{n}}; z = 0; z = 1; z = 1 - i;$
- 12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{2^n (n+1)}; z = 1 + i; z = -2 + i; z = \sqrt{3} + 2i;$
- 13)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z-i)^n}{(2i)^n}; z = 0; z = 3i; z = 2 + 2i;$
- 14)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n (z+1)^n}{n^2}; z = 0; z = -\frac{4}{3}; z = -1 + \frac{i}{2};$

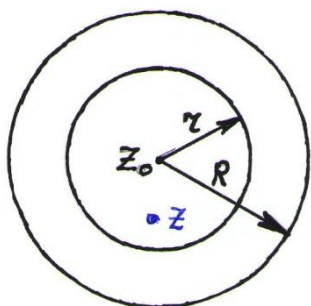
- 15)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{\ln(n+1)}$ ;  $z = 0$ ;  $z = 3$ ;  $z = 1+i$ ;
- 16)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{3^n}$ ;  $z = -1+i$ ;  $z = 3+3i$ ;  $z = \sqrt{5}+i$ ;
- 17)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{i^n n^2}$ ;  $z = 0$ ;  $z = 1+i$ ;  $z = 3i$ ;
- 18)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}}$ ;  $z = 0$ ;  $z = 2+i$ ;  $z = 2+2i$ ;
- 19)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$ ;  $z = 1+2i$ ;  $z = 0$ ;  $z = 3i$ ;
- 20)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{4^n}$ ;  $z = -1+i$ ;  $z = 5-i$ ;  $z = 2+\sqrt{7}i$ ;
- 21)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(z-2)^n}{(n+1)^2}$ ;  $z = 2+\frac{i}{2}$ ;  $z = 0$ ;  $z = 2+i$ ;
- 22)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+i)^n}{2^n(n^2+4)}$ ;  $z = 1+i$ ;  $z = -2+i$ ;  $z = \sqrt{3}+2i$ ;
- 23)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n(z-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ ;  $z = 2+i$ ;  $z = 0$ ;  $z = 1$ ;
- 24)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{2^n} (z-1)^n$ ;  $z = 1+i$ ;  $z = 2$ ;  $z = \frac{3}{2}$ ;
- 25)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2-i)^n}{n2^n}$ ;  $z = 2+\frac{i}{2}$ ;  $z = -1+i$ ;  $z = 2+3i$ ;
- 26)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{n+1}$ ;  $z = 1-i$ ;  $z = 0$ ;  $z = i$ ;
- 27)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{(n^2+n\ln 1)}$ ;  $z = 3+i$ ;  $z = 0$ ;  $z = 2-i$ ;
- 28)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n+\sqrt[3]{(n+1)^2}}$ ;  $z = 0$ ;  $z = 1$ ;  $z = \frac{i}{2}$ ;

$$29) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2+i)^n}{2^{2n}(n^2+1)}; \quad z = 2 + 3i; \quad z = 4 + i; \quad z = -6i;$$

$$30) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(z-i)^n}{n(n^2+1)}; \quad z = 1 + \frac{i}{2}; \quad z = \frac{3}{2}; \quad z = 0.$$

### 17.5.3 Тейлордун катары

**17.6 Теорема.** Эгерде  $f(z)$  функциясы  $|z - z_0| < R$  ( $R < \infty$ ) тегерегинде аналитикалык функция болсо, анда  $f(z)$  функциясы бул тегеректе жыйналуучу



17.40-чийме

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (37)$$

даражалуу катарына ажырайт жана берилген тегеректе **регулярдуу (туура) функция** деп аталат.

**Далилдөө.** ► Борбору  $z_0$ , радиусу  $R$  болгон

$|z - z_0| < R$  тегерегин тургузуп, тегеректин ичинде эркин абалда жайгашкан  $z$  чекитин алалы. Тегеректин ичине  $z$  чекитин кармап тургандай борбору  $z_0$ , радиусу  $r < R$  болгон ички тегерегин сызалы (17.40 – чийме). Ички тегеректин чек ара сызыгы  $|\xi - z_0| = r$  теңдемеси менен берилген  $l$  айланасы болсун ( $\xi \in l$ ). Анда Кошинин интегралдык формуласы боюнча

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (38)$$

теңдештиги орун алат.

$l$  айланасында жаткан ар бир  $\xi$  чекитинде

$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1$  барабарсыздыгы орун алгандыктан, айлананын чекиттеринде тийиндиси  $q < 1$  болгон геометриялык прогрессия катарында

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} \quad (39)$$

ажыралышы орун алат. Демек,  $l$  айланасын чекиттеринде (39) дун оң жагындагы катар  $\xi$  өзгөрүлмөсүнө карата  $\frac{1}{z - \xi}$  функциясына бир калыпта жыйналуучу болот. Анткени, (39) катарына жогорку катарга болгон жыйналуучу же чектүү суммага ээ болгон сандык катар

$$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{r(1 - q)}$$

табылат.

(39) ажыралышын эки жагын тең  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  чоңдугуна көбөйтсөк,

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{z - \xi} = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$$

анын бир калыпта жыйналуучулугу сакталат. Анткени  $l$  айланасында  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  үзгүлтүксүз болгондуктан чектелген болуп, чектүү санга көбөйтүүдөн бир калыпта жыйналуучулук бузулбайт. Анда акыркы бир калыпта жыйналуучу катарды  $l$  айланасы боюнча мүчөлөп интегралдоого болот. Кошинин (38), (34) интегралдык формулаларын эске алып, мүчөлөп интегралдоонун натыйжасында

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^n$$

ээ болобуз. Мындан Тейлордун коэффициенттери деп аталган

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (40)$$

белгилөөсүн киргизип, далилдөөнү талап кылган (37) ажыралышын

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

туура экендигине ишенебиз. ◀

**17.13 Аныктама.** (37) катары,  $f(z)$  функциясын  $z_0$  чекитиндеги **Тейлордун катарына ажыралышы**, ал эми (40) формуласы менен аныкталган  $c_n$  комплекстик саны **Тейлордун коэффициенттери** деп аталышат. Мында  $l$  – туюк формадагы ийриси: борбору  $z_0$  – чекити болгон  $|\xi - z_0| = r$  ( $r < R$ ) айлана ( $\xi \in l$ ) болот.

(37), (40) формулаларын колдонуп, айрым элементардык функциялардын Тейлордун катарына ажыралуу таблицасын түзүүгө болот:

$$\text{I. } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (0 \leq |z| < \infty),$$

$$\text{II. } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (0 \leq |z| < \infty),$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad (0 \leq |z| < \infty),$$

$$\text{III. } sh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (0 \leq |z| < \infty),$$

$$\text{IV. } ch z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (0 \leq |z| < \infty),$$

$$\text{V. } (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} z^n, \quad (0 \leq |z| < 1),$$

$$\text{VI. } \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (0 \leq |z| < 1),$$

$$\text{VII. } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (0 \leq |z| < 1),$$



$$\text{VIII. } \operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad (0 \leq |z| < 1).$$

Тейлордун катары көрсөтүлгөн аралыктарда  $f(z)$  функциясына бир калыпта жыйналгандыктан, аларды мүчөлөп дифференцирлөөгө, интегралдоого болот. Ошондой эле Тейлордун катарына ажыраган функциялар, жыйналуу радиустарын ичинде аналитикалык болушат.

*Мындан сырткары Тейлордун катарына ажыратууга таянып, бүтүндөй комплекстик тегиздикте модулдары чектелген аналитикалык функциялар турактуу болорун көрсөтүүгө болот (Лиувилдин теоремасы).*

#### 17.5.4 Аналитикалык функциянын нөлдөрү

$D$  областында аналитикалык  $f(z)$  функциясы берилип, ушул эле  $D$  областындагы  $z_0$  чекитиндеги мааниси  $f(z_0) = 0$  болсо, анда  $z_0$  чекитин  $f(z)$  функциясын нөлү дейбиз. Нөлдүк  $z_0$  чекитин чеке белинде  $f(z)$  функциясын

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратууга болот. Анткени (40) формуласы боюнча катардын алгачкы коэффициенти  $c_0 = \frac{f(z_0)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$  болот. Эгерде  $c_0$  коэффициенти менен кошо  $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$  коэффициенттери да нөлгө тең болушуп,  $c_k \neq 0$  болсо, анда  $z_0$  чекитин  $f(z)$  функциясын  $k$  –тартиптеги же  $k$  эселүү нөлү деп айтабыз. Ал эми  $k$  саны нөлдүн тартиби деп аталып, ал эми  $k = 1$  болгон учурда  $z = z_0$  чекити жөнөкөй нөл деп коюлат. Тейлордун коэффициенттери (40) формуласы менен эсептелгендиктен, бул учурда

$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$  шарттары аткарылып,  $k$  – тартиптеги  $z_0$  нөлдүк чекитин чеке белинде  $f(z)$  функциясы

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \varphi(z) \quad (41)$$

көрүнүштөгү Тейлордун катарына ажырайт. Мында  $\varphi(z)$  деп Тейлордун катарынын

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n \quad (42)$$

нөл эмес бөлүгү белгиленген.

$\varphi(z)$  функциясы да  $z_0$  чекитин чеке белинде аналитикалык жана чекиттин өзүндө  $\varphi(z_0) \neq 0$  нөлдөн айырмалуу. Ошондой эле (41), (42) катарларын жыйналуу радиустары да дал келишет.

### Мисалдар

1).  $f(z) = 1 - e^z$  функциясын нөлдөрүн таап, анын тартибин аныктайлы.

►  $f(z)$  функциясын нөлгө теңдеп  $1 - e^z = 0 \Leftrightarrow e^z = 1 \Leftrightarrow$

$z_n = 2n\pi i, n = 0, \pm 1, \dots$  чечимдерин табабыз.  $f(z)$  тин туундусун эсептеп, ушул чекиттердеги маанилери

$$f'(2n\pi i) = (1 - e^z)'|_{z_n=2n\pi i} = -e^z|_{z_n=2n\pi i} = -e^{2n\pi i} =$$

$= -(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) = -(1 + 0) = -1 \neq 0$  нөлдөн айырмалуу экендигин көрөбүз. Анда  $z_n = 2n\pi i$  чекиттери берилген функциянын жөнөкөй нөлдөрү болушат. ◀

2).  $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$  ( $z \neq 0$ ),  $f(0) = 0$  функциясын нөлү  $z_0 = 0$  чекити экендиги белгилүү, анын тартибин аныктагыла.

►  $z_0 = 0$  чекитин чеке белинде  $\sin z$  функциясын таблицадагы (II) Тейлордун катарына ажыралышын пайдаланып, берилген функцияны

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)} = \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots} = z^5 \cdot \varphi(z)$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында  $\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots}$  деп алынган функция үчүн  $z_0 = 0$  нөлдүк чекит болбойт, анткени

$\varphi(0) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - 0 + 0 - \dots} = 6 \neq 0$  келип чыгат. Ошондуктан  $z_0 = 0$  чекити мисалда берилген  $f(z)$  функциясына 5 – тартиптеги нөл чекити боло алат. ◀

**3).** Төмөнкү функциялардын нөлдөрүн жана ал нөлдөрдүн тартибин тапкыла:

a)  $f(z) = z^4 + 16z = z^2(z^2 + 16)$

**Чыгаруу.** ▶ Мында  $\varphi(z) = z^2 + 16$  деп алууга болот.  $z^2 = 0$  теңдемесинен  $z_1 = z_2 = 0$ . Демек,  $z = 0$  саны берилген функциянын 2-тартиптеги нөлү болот. Ал эми  $z^2 + 16 = 0$  теңдемесинен  $z_{3,4} = \pm 4i$  ни алабыз. Бул сандар берилген функциянын 1 эселүү (жөнөкөй) нөлдөрү болушат. ◀

b)  $f(z) = \frac{z^4}{1 - \cos z}$

**Чыгаруу.** ▶  $f(z)$  функциясын нөлү  $z = 0$  чекити болот. Эми бул нөлдүн тартибин табалы:

$$\begin{aligned} \frac{z^4}{1 - \cos z} &= \frac{z^4}{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} = \frac{z^4}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots} = \\ &= \frac{z^2}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots} = z^2 \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots} \right] = z^2 \varphi(z) \end{aligned}$$

болот. Мында

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots}$$

болот. Эгерде  $z = 0$  болсо,  $\varphi(0) \neq 0$ . Демек,  $z = 0$  берилген функциянын 2 эселүү нөлү болот. ◀

с)  $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$  функциясын нөлдөрүн жана ал нөлдөрдүн тартиптерин тапкыла.

**Чыгаруу.** ▶  $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  болгондуктан берилген функциянын

$$1 + \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0, \quad e^z + e^{-z} = -2, \quad e^z + \frac{1}{e^z} = -2, \quad \frac{e^{2z} + 2e^z + 1}{e^z} = 0$$

$$\frac{(e^z + 1)^2}{e^z} = 0 \text{ нөлү, } e^z = -1 \text{ теңдемесин чечимдери катарында}$$

$$z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1),$$

$$z = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1 + 2k) \text{ чекиттери болушат.}$$

Мында  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Демек,  $z = i\pi(1 + 2k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$  функциясын 2 эселүү нөлдөрү болушат. ◀

## КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү берилген функциялардын нөлдөрүн жана ал нөлдөрдүн тартиптерин тапкыла:

I.  $f(z) = (z^3 - 1)^2$

( Жообу :  $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  -2 эселүү нөлдөрү болушат.

II.  $f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 5z + 4)^2}{z + 3}$

( Жообу :  $z_1 = 1$  — жөнөкөй нөл;  $z_2 = -1$  — үч эселүү нөл;

$z_3 = -4$  — эки эселүү нөл).

III.  $f(z) = \sin 2z$

(Жообу :  $z = \frac{\pi k}{2}$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )) – жөнөкөй нөлдөр).

IV.  $f(z) = \operatorname{ctg}^2 2z$

(Жообу :  $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )) эки эселүү нөлдөр).

V.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ,

(b) (Жообу :  $z = \pi k$ , ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ )) жөнөкөй нөлдөр).

VI.  $f(z) = \frac{(z+8)^2(z^2+10z+16)^3}{2z^2-1}$ ,

(Жообу :  $z_1 = -8$  – 5. эселүү нөл,  $z_2 = -2$  – үч эселүү нөл).

## § 17.6 Лорандын катарлары. Обочолонгон өзгөчө чекиттер жана аларды классификациялоо

### 17.6.1 Лорандын катарлары

$|z - z_0| < R$  тегерегин ичинде аналитикалык болгон  $f(z)$  функциясын, борбордук  $z_0$  чекитинде Тейлордун катарына ажыратып үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк бар. Ал эми  $r < |z - z_0| < R$  алкагында аналитикалык болгон  $f(z)$  функциясын практикалык жактан колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүү үчүн, аны Тейлордун катарын жалпылаган  $(z - z_0)$  дун терс жана оң даражалары боюнча катарга ажыратуу усулу иштелип чыгылган.

**17.14 Аныктама.** Эгерде  $f(z)$  функциясы  $r < |z - z_0| < R$

( $0 < r < R < \infty$ ) тегерек алкагын ичинде аналитикалык функция болсо, анда аны Лорандын катары деп аталган

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (43)$$

көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратууга болот. Мында

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \xi \in L) \quad (44)$$

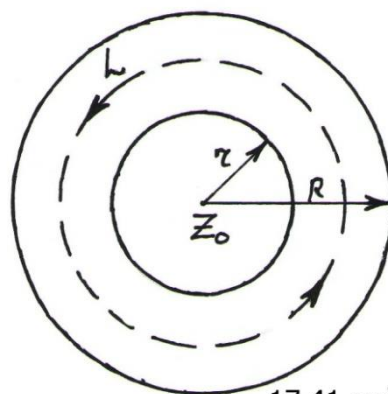
Лорандын коэффициенттери деп аталышат.  $L$  – интегралдоо жолу

борбору  $z_0$  – чекити болуп,  $r < |z - z_0| < R$  алкагын ичинде кармалып турган айлана (17.41 – чийме).

(43) ажыралуусу  $r < |z - z_0| < R$  алкагын ичиндеги ар бир чекиттерде туура болот.

Лорандын (43) катарын

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$



17.41-чийме

бөлүгү, анын **негизги бөлүгү**, ал эми

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

бөлүгү болсо **туура бөлүгү** деп аталышат.

Лорандын катарын  $c_n$  – коэффициенттерин табуу (44) формуласы менен ишке ашырылып, айрым жөнөкөй функцияларды Тейлордун катарына ажыратуунун даяр таблицасы колдонулат:

Мисалдар

1).  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$  функциясын  $z - 1$  ге карата ажыратылган

даражалуу катарын тапкыла.

**Чыгаруу.** ► Берилген функциянын өзгөчө чекиттери  $z = 0$  жана  $z = -1$  болот. Борбору  $z = 1$  чекитинде болуп,  $z = 0$  жана

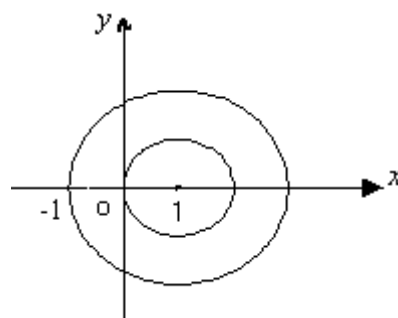
$z = -1$  чекиттери аркылуу өткөн айланаларды сызабыз (17.42 – чийме):

Натыйжада төмөнкү 3 областты алабыз :

1.  $|z - 1| < 1$  (тегерек);

2.  $1 < |z - 1| < 2$ . (алкак)

3.  $|z - 1| > 2$ . ( $|z - 1| \leq 2$  областынын сырты).



17.42 – чийме

Берилген функцияны  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$

көрүнүштө жазып, аны алынган 3 областтын ар биринде изилдейбиз:

1.  $|z - 1| < 1$  областында

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots + (-1)^n (z-1)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{болот.} \end{aligned}$$

Ал эми  $|z - 1| < 2$  областында

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{z-1}{2}\right) + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

болгондуктан,

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right] (z-1)^n$$

түрүндө Тейлордун катарын же Лорандын катарын туура бөлүгүн алабыз.

2. Берилген функцияны  $1 < |z-1| < 2$  алкагында изилдейли:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} \left[ 1 - \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{z-1}\right)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(z-1)^n} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \dots + \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

болот. Мында  $\frac{1}{|z-1|} < 1$ . Ошондай эле  $|z-1| < 2$  үчүн

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} - \frac{(z-1)^3}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

алабыз. Демек берилген функция үчүн  $1 < |z-1| < 2$  алкагындагы

$$\frac{1}{z(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

Лорандын катарын алабыз.



3. Эми болсо, берилген функцияны  $|z - 1| > 2$  областында катарга ажыраталы.

$|z - 1| > 2$  болгондуктан  $\frac{1}{|z-1|} < \frac{1}{2}$  жана  $\frac{1}{|z-1|} < 1$  болот. Ошондуктан

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{z} &= \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot [1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \dots + (-1)^n \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \dots] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

жана

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} [1 - \frac{2}{z-1} + \frac{2^2}{(z-1)^2} - \frac{2^3}{(z-1)^3} + \dots + (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^n} + \dots] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

болот. Мындан да  $|z - 1| > 2$  областында

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} (1 - 2^n) \end{aligned}$$

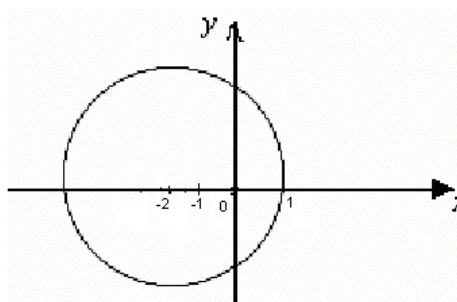
түрүндөгү негизги гана бөлүктөн турган Лорандын катарын алабыз. ◀

2).  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$  функциясын  $(z + 2)$  ге карата Лорандын катарына ажыраткыла.

**Чыгаруу.** ▶ Бул функциянын өзгөчө чекити  $z = 1$  болот. Борбору  $z = -2$  чекити болгон жана  $z = 1$  чекити аркылуу өткөн айлананы сызабыз (17.43 – чийме).

Мында, комплекстик тегиздик төмөндөгүдөй 2 областка бөлүнөт:

- а)  $|z + 2| < 3$  - тегереги,  
 в)  $|z + 2| > 3$  – тегеректин сырты.



17.43 – чийме

Ар кандай  $z \neq 1$  үчүн

$$\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{3-(z+2)} \text{ болорун билебиз.}$$

а) Биринчи  $\frac{1}{1-z}$  функциянын  $|z + 2| < 3$  областындагы  $(z + 2)$  ге карата даражалуу катарга ажыралышын табалы. Каралган областта  $\frac{|z+2|}{3} < 1$  барабарсыздыгы аткарылгандыктан

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z+2}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^n} \quad \text{же} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$$

ажыралышы орун алып, барабардыктын сол жагындагы катар  $\frac{1}{1-z}$  функциясына бир калыпта жыйналуучу болот. Эки тарабынан тең туунду алып, берилген функциянын

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

түрүндөгү Тейлордун катарына ажыралышын алабыз.

в) Ал эми  $|z + 2| > 3$  областында  $\frac{3}{|z+2|} < 1$  болгондуктан

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{3-(z+2)} = -\frac{1}{z+2} \frac{1}{1-\frac{3}{z+2}} =$$

$$= -\frac{1}{z+2} \left[ 1 + \frac{3}{z+2} + \frac{3^2}{(z+2)^2} + \frac{3^3}{(z+2)^3} + \dots + \frac{3^n}{(z+2)^n} + \dots \right] =$$

$$= -\frac{1}{z+2} - \frac{3}{(z+2)^2} - \frac{3^2}{(z+2)^3} - \dots - \frac{3^n}{(z+2)^{n+1}} - \dots$$

ажыралышы орун алат. Акыркы барабардыктын эки тарабынан тең туунду алып, берилген функция

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3 \cdot 2}{(z+2)^3} + \frac{3^2 \cdot 3}{(z+2)^4} + \dots + \frac{3^n (n+1)}{(z+2)^{n+2}} + \dots$$

негизги бөлүктөн гана турган Лоран катарына ажырагына ынанабыз. ◀

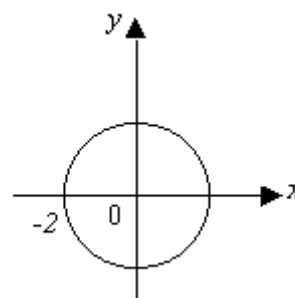
**3).**  $f(z) = \sqrt[3]{2+z}$  функциянын  $z$  ге карата Лорандын катарына ажыралыш тапкыла.

**Чыгаруу.** ▶ Берилген функциянын өзгөчө чекити  $z = -2$  жана бул чекитте функция аналитикалык функция эмес. Себеби, бул чекитте функциянын туундусу аныкталбайт.

Борбору  $z = 0$  чекити болгон жана  $z = -2$  чекити аркылуу өткөн айлананы сызабыз (17.44 – чийме). Натыйжада, төмөндөгү 2 областты алабыз:

- а)  $|z| < 2$  – тегереги;
- в)  $|z| > 2$  – тегеректин сырты.

а) Таблицадагы VI – формуланы пайдаланып берилген функцияны  $|z| < 2$  областында даражалуу катарга ажыраталы. Бул учурда



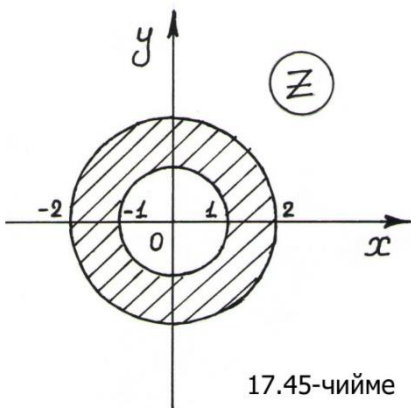
17.44 – чийме

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+z} &= \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{2} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) z^2}{2! 2^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) z^3}{3! 2^3} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \left(\frac{1}{3} - 3\right) z^4}{4! 2^4} + \dots \right] = \\ &= \sqrt[3]{2} \left( 1 + \frac{z}{3 \cdot 2} - \frac{2 \cdot z^2}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5 \cdot z^3}{3^3 \cdot 2^3 \cdot 3!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot z^4}{3^4 \cdot 2^4 \cdot 4!} + \dots \right) = \\ &= \sqrt[3]{2} \left( 1 + \frac{z}{6} \right) + \sqrt[3]{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} (n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ээ болобуз. Ошентип  $\sqrt[3]{2+z}$  функциясы  $\frac{|z|}{2} < 1$  же  $|z| < 2$  областында жогорудагыдай Тейлордун катарына ажырайт.

в) Эми  $\sqrt[3]{2+z}$  функциясын  $|z| > 2$  областындагы Лорандын катарына ажыралышын табалы:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+z} &= \sqrt[3]{z} \left(1 + \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{z} \left[ 1 + \frac{2}{3 \cdot z} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)2^2}{2!z^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\left(\frac{1}{3}-2\right)2^3}{3!z^3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)2^4}{4!z^4} + \dots \right] = \\ &= \sqrt[3]{z} \left( 1 + \frac{2}{3 \cdot z} - \frac{2 \cdot 2^2}{3^2 \cdot 2! \cdot z^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 2^3}{3^3 \cdot 3! \cdot z^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2^4}{3^4 \cdot 4! \cdot z^4} + \dots \right) = \end{aligned}$$



$$= \sqrt[3]{z} \left( 1 + \frac{2}{3 \cdot z} \right) + \sqrt[3]{z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \left( \frac{2}{z} \right)^{n+1}$$

Бул катар жыйналат, себеби  $\frac{2}{|z|} < 1$ . Демек,

бул учурда  $\sqrt[3]{2+z}$  функциясы негизги бөлүктөн гана турган Лорандын катарына ажырайт ◀

4).  $z_0 = 0$  деп алып,  $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$  функциясын ар кандай областтарда Лорандын катарына ажыраткыла.

**Чыгаруу.** ► Берилген функцияны

$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2z+1}{(z+2) \cdot (z-1)} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$  көрүнүштөгү элементардык бөлчөктөрдүн суммасы катарында жазалы. Мындан берилген функциянын эки  $z_1 = -2$  жана  $z_2 = 1$  өзгөчө чекиттери бар экендигин көрөбүз. Анда  $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$  функциясы борбордук чекити  $z_0 = 0$  болгон төмөндөгүдөй (17.45 – чийме) үч областта аналитикалык болот:

а)  $|z| < 1$  тегерегин ичинде; в)  $1 < |z| < 2$  алкагында;

г)  $|z| > 2$  тегерегин сыртында. Аларды өз – өзүнчө карайлы.

**а)  $|z| < 1$  тегерегин ичинде:** Берилген функцияны

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z} \text{ көрүнүштө жазып,}$$

$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$  жана  $|z| < 1$  болгондо чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын формуласына таянып

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} - \dots, \quad |z| < 2; \quad (45)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots, \quad |z| < 1 \quad (46)$$

ажыралыштарына ээ болобуз. Бул эки ажыралыш тең  $|z| < 1$  тегерегин ичинде орун алгандыктан, берилген функция ушул тегеректин ичинде

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} - \dots\right) - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} - \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots) = \end{aligned}$$

$= -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 - \frac{31}{32}z^4 - \dots$  көрүнүштөгү Тейлордун даражалуу катарына ажырайт.

**в)  $1 < |z| < 2$  алкагында:** Бул алкактын чекиттеринде  $|z| < 2$  шарты сакталгандыктан (45) ажыралышы туура бойдон кала берет, ал эми  $|z| > 1$  болгондуктан (46) ажыралышы аткарылбайт. Ошондуктан  $f(z)$  функциясын

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \text{ көрүнүштө өзгөртүп түзсөк, анда экинчи}$$

кошулуучу бөлчөктү  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$  болгондо

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (47)$$

көрүнүштөгү катарга ажыратууга болот. Анда берилген функция  $1 < |z| < 2$  алкагында төмөндөгүдөй

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} - \dots + \\
&+ \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} - \dots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Лорандын катарына ажырайт.

г)  $|z| > 2$  тегерегин сыртында: Тегеректин сыртында (45) ажыралышы аткарылбайт, ал эми (47) ажыралышы  $|z| > 1$  болгондо аткарыла бергендиктен,  $|z| > 2$  болгондо деле бузулбайт. Ошондуктан функцияны

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

көрүнүшкө өзгөртүп жазып, биринчи кошулуучу бөлчөктү  $\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$  болгондо

$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} - \dots\right)$  геометриялык прогрессиянын суммасы катарында жазууга болот. Анда берилген функцияны  $|z| > 2$  тегерегин сыртында

$$\begin{aligned}
\frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} - \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots\right) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots
\end{aligned}$$

көрүнүштөгү Лорандын катарына ажыратууга болот. ◀

5).  $0 < |z-1| < 3$  алкагында  $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$  функциясын Лорандын катарына ажыраткыла.

**Чыгаруу.** ▶ Берилген функцияны  $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}$  көрүнүштө ажыратып, экинчи кошулуучуну өзгөртүп

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

жазып,

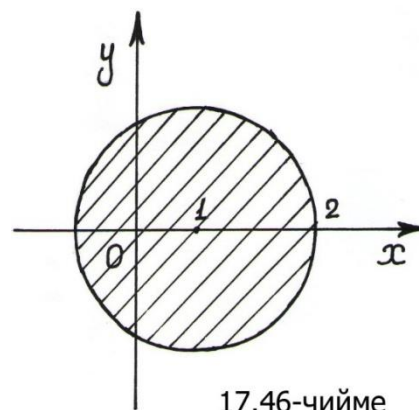
$$\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| = |(x-1) + iy| < 3 \text{ болгондо (17.46 – чийме)}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = 1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{9} - \frac{(z-1)^3}{27} + \dots$$

ажыралышына ээ болобуз. Анда берилген функцияны  $0 < |z - 1| < 3$  алкагында төмөндөгүдөй

$$\frac{2z + 1}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} - \frac{z-1}{9} + \frac{(z-1)^2}{27} - \frac{(z-1)^3}{81} + \dots$$

Лорандын катарына ажырата алабыз. ◀



## КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү берилген функцияларды  $(z - z_0)$  ге карата Лорандын катарына ажыраткыла жана алынган катарлардын жыйналуу областын тапкыла:

$$(1) \quad f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} \quad (z - \text{ке карата}).$$

Жообу:

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1,$$

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} \quad (z \text{ ге карата}),$$

Жообу:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}, \quad |z| < 1,$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 1.$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{z} \quad (z - 1 \text{ ге карата})$$

Жообу:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(z-1)^{n-1}, \quad |z-1| < 1,$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1.$$

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 1} \quad (z+1 \text{ ге карата})$$

Жообу:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{2^{n+1}}, \quad |z+1| < \sqrt{2},$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^{2n+2}}, \quad |z+1| > \sqrt{2}.$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{1-z}{z(z+1)} \quad (z+1 \text{ ге карата})$$

Жообу:

$$f(z) = -\frac{2}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$$

$$f(z) = -\frac{2}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}, \quad |z+1| > 1.$$

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \text{ ге карата}),$$

Жообу:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

### МАСЕЛЕЛЕР ( № 5 тапшырма)

Төмөндөгү берилген функцияларды  $z - z_0$  ге карата Лорандын катарына ажыралышын жана ал катарлардын жыйналуу областын тапкыла:



- (1)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$  (( z + 1) ге карата)
- (2)  $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$  ( z ге карата ),
- (3)  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$  (( z - 1) ге карата)
- (4)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}$ , ( z ге карата )
- (5)  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$ , ( z ге карата)
- (6)  $f(z) = \frac{1}{(2 - z)^2}$  , (( z - 3) ге карата)
- (7)  $f(z) = \frac{\sqrt[3]{1 + z^3}}{z}$ , ( z ге карата )
- (8)  $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$ , (( z + 2) ге карата )
- (9)  $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + z^3}}$ , ( z ге карата)
- (10)  $f(z) = \frac{1}{z(z - 2)^2}$  , (( z - 1) ге карата)
- (11)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ , ( z ге карата)
- (12)  $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - z^3}}$  , ( z ге карата)
- (13)  $f(z) = \frac{1}{z(z + 2)}$  , (( z + 1) ге карата)
- (14)  $f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2}$  , (( z + 1) ге карата)

- (15)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ , ( z ге карата )
- (16)  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ , ( ( z - 1 ) ге карата )
- (17)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3}$ , ( z ге карата )
- (18)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$ , ( ( z - 1 ) ге карата )
- (19)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 7z + 10}$ , ( ( z - 2 ) ге карата )
- (20)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z}$ , ( ( z + 1 ) ге карата )
- (21)  $f(z) = \frac{\sqrt[3]{1-z^3}}{z}$ , ( z ге карата )
- (22)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z}$ , ( ( z + 2 ) ге карата )
- (23)  $f(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$ , ( ( z - 1 ) ге карата )
- (24)  $f(z) = \sqrt{1+z^2}$ , ( z ге карата )
- (25)  $f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z}$ , ( ( z - 2 ) ге карата )
- (26)  $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ , ( z ге карата )
- (27)  $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ , ( z ге карата )
- (28)  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ , ( ( z - 2 ) ге карата )
- (29)  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$ , ( ( z + 1 ) ге карата )

$$(30) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 7z + 10}, \quad ((z - 2) \text{ ге карата})$$

### 17.6.2 Функциянын обочолонгон өзгөчө чекити

Айталы,  $f(z)$  функциясы комплекстик тегиздиктин кайсы бир  $z_0$  чекитин өзүндө жашабасын, же болбосо бир маанилүү аныкталбасын же аналитикалык эмес болсун дейли. Бирок аны курчап турган

$0 < |z - z_0| < \varepsilon$  алкагы ( $z_0$  чекитин оюп алынган аймакчасы деп да аташат) табылып, алкактын бардык чекиттеринде  $f(z)$  функциясы бир маанилүү аныкталган аналитикалык (регулярдуу) функция болсун. Бул учурда  $z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын **обочолонгон өзгөчө чекити** деп аталат.

$f(z)$  функциясын  $z = z_0$  чекитине чексиз жакын чекиттердеги жүрүм – турумуна жараша,  $z_0$  – обочолонгон өзгөчө чекиттери:

1. **Жоюлуучу**, эгерде  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  чектүү предели жашаса;

2. **Полюс же уюл**, эгерде  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  болсо;

3. **Маанилүү өзгөчө чекит**, эгерде  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  предели таптакыр жашабаса

деген түрлөргө бөлүнүшөт.

Обочолонгон өзгөчө чекиттин кайсы түргө кириши,  $f(z)$  функциясын  $z = z_0$  чекитинин оюп алынган  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$  аймакчасында ажыратылган Лорандын катарын мүнөзүнө тыгыз байланышкан:

**1<sup>0</sup>**.  $z = z_0$  чекитин  $f(z)$  функциясына жоюлуучу өзгөчө чекит болушу үчүн,  $f(z)$  функциясын  $z = z_0$  чекитиндеги Лорандын катарын негизги бөлүктү кармабашы же

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (48)$$

көрүнүштө болушу зарыл жана жетиштүү шарт болот.

Чынында эле, бул учурда  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum c_n (z - z_0)^n = c_0$  чектүү предели жашарына күбө болобуз.

**2<sup>0</sup>.**  $z = z_0$  чекитин кайсы бир оюп алынган  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$  аймакчасында  $f(z)$  функциясы чектелген болсо гана  $z_0$  чекити жоюлуучу өзгөчө чекит боло алат.

### Мисалдар

1)  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  функциясы үчүн  $z = 0$  чекити жоюлуучу өзгөчө чекит болот. Себеби  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ .

2)  $f(z) = \frac{chz-1}{z^2}$  функциясы үчүн  $z = 0$  чекити жоюлуучу өзгөчө чекит болот. Себеби

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{chz-1}{z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + e^{-z} - 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + e^{-z} - 2}{2z^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^{-z}}{4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + e^{-z}}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

чектүү предели жашайт. Экинчи жактан берилген функцияны

$f(z) = \frac{chz-1}{z^2}$  Лорандын катарына ажыратсак

$$\frac{chz-1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[ 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots - 1 \right] = \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots, \text{ анын негизги}$$

бөлүгү жок. Демек,  $z = 0$  чекити жоюлуучу өзгөчө чекит болот.

**3<sup>0</sup>.**  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын уюлу болушу үчүн,  $z = z_0$  чекитин аймакчасындагы Лорандын катарына ажыралышын башкы

бөлүгү, чектүү  $m$  сандагы оң жана нөлдөн айырмалуу мүчөлөрдү гана кармап турушу же

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 +$$

$$+ c_1(z - z_0) + \dots + c_m(z - z_0)^m + \dots \quad (c_{-m} \neq 0) \quad (49)$$

көрүнүшүндө болушу зарыл жана жетиштүү. Мында  $m$  каалагандай чектүү натуралдык сан.

**4<sup>0</sup>.** Эгерде  $z = z_0$  чекити  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  функциясына  $n$  – тартиптеги нөл болсо, анда  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясына  $n$  – тартиптеги уюл болуп эсептелет. Ал эми  $n = 1$  болгондо **жөнөкөй уюл** деп аталат. (44) ажыралышында  $m$  саны уюлдун тартибине барабар болот.

Төмөндөгү функциялардын уюлдарын тапкыла жана алардын тартибин аныктагыла:

$$3) f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2}$$

**Чыгаруу.** ►  $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{e^{\pm i}}{(i^2 + 1)^2} = \infty$

болгондуктан  $z = \pm i$  уюлдары болушат.

Эми  $z = i$  уюлунун тартибин аныктайлы:

$$\varphi(z) = \left( \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} \right)^{-1} = \frac{(z^2 + 1)^2}{e^z} = \frac{(z+i)^2(z-i)^2}{e^z} = (z-i)^2 \frac{(z+i)^2}{e^z}$$

болот жана  $z = i$  үчүн  $\frac{(z+i)^2}{e^z} \neq 0$ . Демек,  $z = i$  чекити  $f(z)$

функциясын 2 – тартиптеги уюлу болот. Себеби, бул чекит  $\varphi(z)$  функциясын 2 – тартиптеги нөлү.

Ушундай эле жол менен  $z = -i$  чекити да  $f(z)$  функциясын 2 – тартиптеги уюлу экендигин көрөбүз. ◀

$$4) f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

**Чыгаруу.** ►  $z = 0$  чекити берилген функция үчүн обочолонгон өзгөчө чекит. Бул функциянын өзгөчө чекитин мүнөзүн толук билүү үчүн, аны берилген чекиттин аймакчасында Лорандын катарына ажыратабыз:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \sin z = \frac{1}{z^3} \left[ z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \right] = \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} z^0 + \frac{1}{5!} z^2 - \frac{1}{z!} z^4 + \dots = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

болот. Мындан жана (49) дан,  $z = 0$  чекити берилген функциянын 2 – тартиптеги уюлу экендигин көрөбүз.

**5<sup>0</sup>.**  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын **маанилүү** өзгөчө чекити болушу үчүн,  $f(z)$  функциясын Лорандын катарына ажыралышында негизги бөлүгүнүн мүчөлөрү чексиз санда болушу зарыл жана жетиштүү шарт болот.

5) Мисалы  $z_0 = 0$  чекити  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$  функциясын маанилүү өзгөчө чекити болорун көрсөткүлө.

**Чыгаруу.** ► Берилген функциянын 0 чекитине чыныгы жана жалган октор боюнча пределдерин эсептеп көрөлү:

а)  $Ox$  огу боюнча умтулса  $y = 0$  болуп,  $z = x$  болгондуктан

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty \text{ келип чыгат.}$$

б)  $Oy$  огу боюнча умтулсак,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(iy) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{(iy)^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0 \text{ башка пределге ээ болот.}$$

Демек,  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z^2}}$  предели жашабайт, анткени ал жалгыз эмес, б.а. анын мааниси умтулуу жолу алмашкан сайын өзгөрүп турат.

Берилген функцияны  $z_0 = 0$  чекитин аймакчасындагы чекиттерде Лорандын катарына ажыратып

$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \dots$ ,  $|z| > 0$ , анын негизги бөлүгү чексиз сандагы мүчөлөрдөн турганына күбө болобуз. ◀

$$\begin{aligned} \text{б) } f(z) &= z \cdot \sin \frac{1}{z} = z \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!} \frac{1}{z^7} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n}} + \dots \end{aligned}$$

Демек,  $z = 0$  чекити  $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$  функциясын маанилүү өзгөчө чекити болот.

**6<sup>0</sup>. (Сохоцкийдин теоремасы)** Эгерде  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын *маанилүү өзгөчө чекити болсо*, анда кандай гана  $A$  комплекстик санын алсак да  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$  теңдештиги аткарыла тургандай,  $z_0$  чекитине умтулуучу  $\{z_n\}$  чекиттерин удаалаштыгын түзүүгө болот.

### § 17.7 Функциянын ресидиси (Residi)

$z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясына обочолонгон өзгөчө чекит болуп,  $r$  радиустуу  $|z - z_0| = r$  теңдемеси менен берилген жетишерлик кичине  $l$  – айланасы, аны курчап турсун жана  $|z - z_0| \leq r$  тегерегин ичинде функциянын  $z_0$  чекитинен башка өзгөчө чекиттери жок болсун дейли.

Ушундай шарттарда  $l$  – айланасы боюнча эсептелген

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l f(\xi) d\xi$$

$\Pi$  – түрдөгү ийри сызыктуу интегралдын сандык мааниси,  $f(z)$  функциясын  $z = z_0$  өзгөчө чекитиндеги *ресидиси (орусча вычет, кыргызча чегерши)* деп аталып,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\xi) d\xi \quad (50)$$

көрүнүштө белгиленет ( $\xi \in l$ ).

Лорандын коэффициенттерин табуучу (44) формулсына

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{таянып, функциянын ресидисин}$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\xi) d\xi \quad (51)$$

көрүнүштө жазууга болот. Ошентип функциянын  $z = z_0$  өзгөчө чекитиндеги ресидиси деп, анын  $z_0$  чекитиндеги Лорандын катарына ажыралышындагы  $(z - z_0)^{-1}$  ге туура келген коэффициентти айтабыз. Мындан жоюлуучу өзгөчө чекиттердеги функциянын ресидиси нөл болору келип чыгат, анткени бул учурда Лорандын катарында  $(z - z_0)$  дун терс даражаларын кармаган мүчөлөр жок же нөлгө барабар. Ошондуктан функцияга уюл болгон өзгөчө чекиттердеги ресидилерди эсептөө ыкмаларын гана карайбыз.

**17.7 Теорема.** Эгерде  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын

$m$  - тартиптеги уюлу болсо, анда

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z) (z - z_0)^m] \quad (52)$$

болот.

**Далилдөө.** ►  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын  $m$  – тартиптеги уюлу болсо, анда аны (49) формуласы боюнча

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_m(z-z_0)^m + \dots,$$

( $c_{-m} \neq 0$ ) көрүнүштөгү Лорандын катарына ажыратууга болот.

Бул барабардыктын эки тарабын тең  $(z - z_0)^m$  ге көбөйтүп



$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \\ + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m}$$

барабардыгын алабыз. Акыркы барабардыктын эки тарабынан тең  $(m-1)$  – тартиптеги туунду алалы. Анда

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m] = (m-1)! c_{-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1)\dots(n+2) c_n (z-z_0)^{n+1}$$

болот. Мындан  $z \rightarrow z_0$  умтулганда пределге өтүп, далилдөөнү талап кылган (52) формуланы

$$Res f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m]$$

келтирип чыгарабыз. ◀

(52) барабардыгына  $m = 1$  ди коюп, жөнөкөй уюлдуун ресидисин эсептөөчү

$$Res f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0) \quad (53)$$

формулага ээ болобуз.

$$\text{Эгерде } f(z) \text{ функциясы } z = z_0 \text{ чекитин аймагында } f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$$

түрдөгү эки регулярдуу функциянын катышы болсо жана

$\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) \neq 0$  шарттары аткарылса, б.а.  $z = z_0$  чекити  $f(z)$  функциясын жөнөкөй уюлу болсо, анда бул учурда (53) төн

$$Res f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)}(z-z_0) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$$

келип чыгат. Демек,  $z = z_0$  чекити  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$  функциясын жөнөкөй уюлу болсо, анда

$$Res f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)} \quad (54)$$

болот.

### Мисалдар

1. Төмөндөгү берилген функциялардын өзгөчө чекиттердеги ресидилерин эсептегиле.

а)  $f(z) = \frac{e^z}{(z-a)^2}$ .

**Чыгаруу.** ►  $z = a$  чекити  $f(z)$  функциясын 2 – тартиптеги уюлу. (52) ден

$$Res f(a) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^z}{(z-a)^2} (z-a)^2 \right\} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \{e^z\} = \lim_{z \rightarrow a} e^z = e^a$$

ны алабыз. ◀

б)  $f(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$ .

**Чыгаруу.** ►  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  чекиттери  $f(z)$  функциясы үчүн жөнөкөй уюлдар болушат. Аны эске алып, (54) төн

$$Res_{z=z_0} f(z) = Res f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z_0^2}{3z_0^2} = \frac{1}{3}$$

ди алабыз.  $Res f(z)$  мааниси  $z_0$  дөн көз каранды эмес болгондуктан, ар бир 3 ресиди бири – бирине барабар. Мындан

$$\sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

болот. ◀

### 17.8 Теорема (Ресиди жөнүндөгү Кошинин теоремасы).

Эгерде  $f(z)$  функциясы, чеги  $L$  туюк формадагы ийри сызыгы болгон  $D$  областын чектүү сандагы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  чекиттеринен башка бардык ички чекиттеринде регулярдуу болсо, анда

$$\oint_L f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k) \quad (55)$$

теңдештиги орун алат ( $\xi \in L$ ).

**Далилдөө.** ►  $D$  областы 17.47 – чиймедеги абалда берилсин, б.а.

$a_1, a_2, \dots, a_n$  чекиттери  $D$  областын ички чекиттери жана функциянын өзгөчө чекиттери болсун. Ал эми  $D$  областында жаткан

$l_1, l_2, \dots, l_n$  – айланалары, борборлору жазылышына карата

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$



17.47 – чийме

чекиттери болгон жана бири – бири менен кесилишпеген жетишерлик кичине айланалар болсун.  $D$  областынан борборлору  $a_1, a_2, \dots, a_n$  чекиттеринде, радиустары  $r_1, r_2, \dots, r_n$  болгон жетишерлик кичине

$l_1, l_2, \dots, l_n$  – айланаларын ичиндеги  $|z - a_k| < r_k$  тегерекчелерин чыгарып салгандан кийинки областты  $D^*$  дейли. Анда,  $D^*$  областын туюк формадагы чеги

$$\partial D^* = L + l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

болуп,  $D^*$  областында  $f(z)$  функциясы Кошинин 17.3 – теоремасын шарттарына баш ийгендиктен, (28) формуласын көп байламталуу областтагы жазылышы боюнча

$$\int_{\partial D^*} f(\xi) d\xi = 0 \quad \text{же} \quad \int_L f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n \int_{l_k^-} f(\xi) d\xi = 0$$

теңдештиги аткарылышы керек ( $\xi \in \partial D^*$ ). Тегерекчелердин

$|z - a_k| < r_k$  ичиндеги областтагы оң багыт, анын  $|z - a_k| > r_k$  сыртындагы областка карата терс багыт болгондуктан, экинчи кошулуучуну теңдештиктин сол жагына өткөрүп, интегралдоо багытын тегерекчелердин ички областтарына карата оң болгондой  $l_k^+ = l_k$  өзгөртсөк,

$$\int_L f(\xi) d\xi - \sum_{k=1}^n \int_{l_k} f(\xi) d\xi = 0 \quad \text{же}$$

$$\oint_L f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} f(\xi) d\xi$$

барабардыгын алабыз. Мындан жана (51) ден далилдөөнү талап кылган (55) теңдештиги келип чыгат. Теорема далилденди. ◀

2.  $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz$  интегралын эсептегиле.

**Чыгаруу.** ▶ Мында  $z = 0, 3$  – тартиптеги уюл жана  $z = -1$  – жөнөкөй уюл. (53) төн

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \{f(z)(z+1)\} = \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{e^z}{z^3(z+1)} (z+1) \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{z^3} = \frac{e^{-1}}{(-1)^3} = -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

ди алабыз. Ал эми (52) формуланы колдонуп

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(0) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{e^z}{z^3(z+1)} z^3 \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{e^z}{z+1} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^z(z+1) - e^z}{(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{ze^z}{(z+1)^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z+1)^3 - ze^z 2(z+1)}{(z+1)^4} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z[(1+z)^2 - 2z]}{(z+1)^3} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(1+z^2)}{(1+z)^3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

болот. Мындан жана (55) тен

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} = 2\pi i [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(-1)] = 2\pi i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right)$$

барабардыгын алабыз. ◀

### 17.7.1 Функциянын чексиз алыстатылган чекитке карата ресидиси

Кеңейтилген комплекстик тегиздиктеги чексиз алыстатылган  $z = \infty$  чекитин аймакчасында  $f(z)$  функциясын Лорандын катарына ажыратуу деп, борбору  $z_0 = 0$ , радиусу жетишерлик чоң  $R$  саны деп эсептелген  $|z - z_0| \geq R$  тегерегин бардык сырткы чекиттеринде аналитикалык болгон ( $z = \infty$  чекитинен башка)  $f(z)$  функциясына жыйналуучу Лорандын катарына ажыратууну түшүнөбүз. Анда чексиз алыстатылган чекиттеги функциянын ресидиси

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_R} f(\xi) d\xi, \quad \xi \in l_R \quad (56)$$

формуласы менен эсептелет. Мында туюк формадагы  $l_R$  – ийриси катарында  $|z - z_0| = R$  тегерегин айланасы алынып, аны бойлоп басканда  $z = \infty$  чекити сол жакта кала тургандай оң багыт тандалды (бул багыт тегеректин ичиндеги область үчүн терс багыт болот).

(56) эрежеси менен аныкталган  $Res f(\infty)$  саны,  $f(z)$  функциясын  $z = \infty$  чекитиндеги Лорандык ажыралышта  $z^{-1}$  дин терс белгиде (интегралдоо жолуна жараша) алынган  $c_{-1}$  коэффициентине барбар

$$Res f(\infty) = -c_{-1} \quad (57)$$

болорун байкайбыз.

3.  $f(z) = \frac{z+1}{z}$  функциясын  $z = \infty$  чекитиндеги ресидисин тапкыла.

**Чыгаруу.**  $\blacktriangleright \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z} = 1$  болгондуктан,  $z = \infty$  чекити берилген функцияга жоюлуучу өзгөчө чекит болорун көрөбүз жана  $f(\infty) = 1$  деп эсептейбиз.

Функцияны  $f(z) = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$  көрүнүштө жазып, акыркы жазылышты  $z = \infty$  чекитин аймакчасында  $f(z)$  тин Лорандык ажыралышы деп алсак, анда  $c_{-1} = 1$  болот. Демек, (57) формуласы боюнча функциянын  $z = \infty$  чекитиндеги ресидиси  $Res f(\infty) = -1$  болору келип чыгат.  $\blacktriangleleft$

Мисалдан көрүнгөндөй чектелген обочолонгон өзгөчө чекиттерден айырмаланып, чексиз алыстатылган жоюлуучу обочолонгон өзгөчө чекиттерде функциянын ресидиси нөлдөн айырмалуу болуп калышы да мүмкүн.

Тейлордун катарына ажыралуу таблицасында көрсөтүлгөн  $e^z, \sin z, \cos z, ch z, sh z$  функцияларын ажыралыштарында  $z$  тин оң даражалары катышкан мүчөлөр чексиз санда болгондуктан, бул функциялар үчүн чексиз алыстатылган  $z = \infty$  чекитин, маанилүү обочолонгон өзгөчө чекит катары эсептеп, Тейлордук ажыралыштарды  $z = \infty$  чекитиндеги Лорандык ажыралыш катарында да алууга болот.

**7<sup>0</sup>.** Эгерде кеңейтилген комплекстик тегиздикте  $f(z)$  функциясын чектүү сандагы чектелген өзгөчө чекиттери болсо, анда бул өзгөчө чекиттердеги функциянын ресидилерин суммасына  $z = \infty$  чекитиндеги ресидисин кошкондо нөл келип чыгат.

Демек, кеңейтилген комплекстик тегиздикте  $z_1, z_2, \dots, z_n$  чекиттери  $f(z)$  функциясын чектелген өзгөчө чекиттери болсо, анда

$$\operatorname{Res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) = 0 \quad (58)$$

$$\text{же } \operatorname{Res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) \quad (59)$$

теңдештиктери орун алат.

Айрым интегралдарды эсептөөдө (59) формуласын колдонуу ыңгайлуу болот. Мисалы:

4.  $\int_{|z|=2} \frac{z}{1+z^8} dz$  интегралын эсептегиле.

**Эсептөө.** ► Берилген функциянын чектелген өзгөчө чекиттери  $|z| = 2$  айланасын ичинде кармалышкан

$$z^8 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^8 = -1$$

теңдемесин чечимдери болушат. Ал эми  $z = \infty$  чекитин аймакчасы катары алынган  $\left| \frac{1}{z^8} \right| < 1 \Leftrightarrow |z|^8 > 1$  тегерегин сыртында

$$f(z) = \frac{z}{1+z^8} \text{ функциясын}$$

$$f(z) = \frac{z}{1+z^8} = \frac{1}{z^8} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^8}} = \frac{1}{z^8} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{16}} - \frac{1}{z^{24}} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{z^8} - \frac{1}{z^{16}} + \frac{1}{z^{24}} - \frac{1}{z^{32}} + \dots$$

көрүнүштөгү Лорандын катарына ажыратууга болот. Мында  $z^{-1} = \frac{1}{z}$  даражасы катышпагандыктан  $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$  болуп,

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{1+z^8} dz = 2\pi i \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z}{1+z^8} dz \right\} = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} f(z_k)$$

(59) формуласы боюнча

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} f(z_k) = -2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$$

теңдештиги келип чыгып, берилген интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{1+z^8} dz = 0$$

көрүнүштө эсептелет. ◀

### 17.7.2 Ресидилердин айрым анык интегралдарды эсептөөдөгү колдонулуштары

**1 – колдонуу.** Айталы,  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  көрүнүштөгү чыныгы өзгөрүлмөлүү бөлчөк функциясы, чыныгы  $Ox$  огун бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо жана ага кошумча

$Q_m(x) \neq 0$ ,  $m \geq n + 2$  шарттарына баш ийсе, анда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sigma$$

теңдештиги орун алат. Мында  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  тиешелүү түрдө  $n, m$  – даражадагы көп мүчөлөр, ал эми  $\sigma$  саны  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$  функциясын комплекстик тегиздиктин жогорку жарым тегиздигинде жайгашкан бардык полюстарындагы ресидилерин суммасы.

Демек  $z_1, z_2, \dots, z_h$  чекиттери  $f(z)$  функциясын комплекстик тегиздиктин жогорку жарым тегиздигинде жайгашкан бардык полюстары болушса, анда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^h \operatorname{Res} f(z_k) \quad (60)$$

теңдештиги орун алат .



5.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$ ,  $a > 0$  интегралын эсептегиле.

**Эсептөө.** ► Интеграл алдындагы  $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$  функция  $x$  өзгөрүлмөсүнө карата жуп болгондуктан, берилген интегралды

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$$

көрүнүштө жазууга болот.

Чыныгы  $Ox$  огунда берилген функция менен ( $z = x$  болгондо  $f(z) = f(x)$ ) дал келген комплекстик өзгөрүлмөлүү

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$  функциясын карайлы. Комплекстик тегиздиктин жогорку жарымында  $f(z)$  функциясын экинчи тартиптеги бир гана  $z = ai$  полюсу (уюлу) бар. Бул өзгөчө чекиттеги функциянын ресидиси (52) формуласы боюнча

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z) (z - ai)^2] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2azi}{(z + ai)^3} = \frac{1}{4ai} \text{ санына барабар. Анда (60) формуласы боюнча} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}$$

берилген интегралдын сандык маанисин табабыз. ◀

## 2 – колдонуу.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \text{ интегралын эсептөө.}$$

Берилген интегралды эсептөө үчүн  $z = e^{ix}$  белгилөөсүн жардамы менен комплекстик  $z$  өзгөрүлмөсүн киргизебиз.

Мындан  $|z| = 1$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  болгондо

$$dx = \frac{dz}{iz}, \quad \cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz} \quad (61)$$

туюнтууларын ишке ашырып, интеграл алдындагы  $\cos x$  менен  $\sin x$  ке карата бөлчөк функцияны,  $z$  комплекстик өзгөрүлмөсүнө карата бөлчөк функцияга айлантасыз

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{\gamma} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} F(z) dz .$$

Мында  $\gamma$  – деп борбору  $O$  чекитинде болгон  $|z| = 1$  бирдик айланасы алынган.

Акыркы интеграл 17.8 – Кошинин теоремасын негизинде  $F(z)$  функциясын бирдик айлананын ичинде жайгашкан өзгөчө чекиттердеги резидилердин  $\sigma$  суммасын  $2\pi i$  ге көбөйткөнгө барабар

( (55) формуласын кара) барабар.

6.  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}, \quad a > b > 0$  интегралын эсептегиле.

**Эсептөө.** ►  $z = e^{ix}$  ордуна коюусун киргизип (61) байланыштарын пайдаланып, берилген интегралды

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } F(z_k)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Бирдик  $|z| = 1$  айланасын ичинде

$F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$  функциясын  $a > b > 0$  шартына баш ийген бир гана экинчи тартиптеги полюс (уюл) болгон өзгөчө чекити бар. Ал өзгөчө чекит

$bz^2 + 2az + b = 0$  теңдемесин  $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  чечими болот. Анда  $z_1$  чекитиндеги резидини

$$\text{Res } F(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [F(z) (z - z_1)^2] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z - z_1)^2 z}{b^2 (z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right] =$$

$= \frac{a}{4(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$  таап, интегралды эсептеген теңдештикке койсок, анда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \cdot \text{Res } F(z_1) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

жообуна ээ болобуз. ◀

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөндөгү берилген функциялардын обочолонгон өзгөчө чекиттерин тапкыла. Кандай өзгөчө чекиттер экендигин билгиле жана ар бир өзгөчө чекиттердеги ресидилерин эсептегиле:

а)  $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$ ; (Жообу:  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = i$  – жөнөкөй уюлдар

$$\text{Res } f(0) = 1; \text{Res } f(-i) = -\frac{1}{2}; \text{Res } f(i) = -\frac{1}{2}.$$

б)  $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$ ; (Жообу:  $z = 1$  – маанилүү өзгөчө чекит,

$$\text{Res } f(i) = -\frac{1}{e}$$

в)  $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}$ ; (Жообу:  $z_1 = 0 - 3$  – тартиптеги уюл,  $z_2 = 2i$

жана  $z_3 = -2i - 2$  – тартиптеги уюлдар,  $\text{Res } f(0) = -\frac{1}{32}$ ,  $\text{Res } f(2i) = \frac{1}{64}$ ;

$$\text{Res } f(-2i) = \frac{1}{64}$$

г)  $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2}$ ; (Жообу:  $z_1 = 1$  жана  $z_2 = -1$  – чекиттери 2 – тартиптеги уюлдар,  $\text{Res } f(1) = 0$ ;  $\text{Res } f(-1) = \frac{1}{2e}$ ).

д)  $f(z) = z^2 \left( \frac{1}{z} - \sin \frac{1}{z} \right)$ ; (Жообу:  $z = 0$  – маанилүү өзгөчө чекит,

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{6}.$$

е)  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$ ; (Жообу:  $z = 0$  - жөнөкөй уюл жана  $\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{2}$ ).

2. Ресиди жөнүндөгү Кошинин теоремасын колдонуп төмөндөгү интегралдарды эсептегиле:

а)  $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^5 + 4z^3}$  (Жообу:  $0$ ).

б)  $\oint_{|z+2|=2} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$  : (Жообу:  $\frac{8\pi i}{25}$ )

в)  $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ ; (Жообу:  $\frac{\pi i}{12}$ ).

### МАСЕЛЕЛЕР( № 6 - тапшырма)

Төмөндөгү берилген функциялардын өзгөчө чекиттерин тапкыла жана кандай өзгөчө чекит экендигин аныктагыла. Андан кийин функциянын өзгөчө чекиттердеги ресидилерин эсептегиле:

(1)  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ ; (13)  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ ;

(2)  $f(z) = \frac{(z-1)^3}{z^3}$ ; (14)  $f(z) = \frac{z^3}{z^3-1}$ ;

(3)  $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$ ; (15)  $f(z) = \frac{1}{z+z^3}$ ;

(4)  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)^2}$ ; (16)  $f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)}$ ;

(5)  $f(z) = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$ ; (17)  $f(z) = \frac{z^3}{(z-2)^2}$ ;

(6)  $f(z) = \frac{1}{z}(1 - e^{\frac{1}{z}})$ ; (18)  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$ ;

(7)  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}$ ; (19)  $f(z) = thz$ ;

$$(8) f(z) = \frac{1-chz}{z^3}; \quad (20) f(z) = \frac{z^2}{z^2+4};$$

$$(9) f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)^2}; \quad (21) f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1};$$

$$(10) f(z) = \frac{z^2}{z^3+1}; \quad (22) f(z) = \frac{\sin z}{z^2};$$

$$(11) f(z) = \frac{z-1}{z^2(1+z^2)}; \quad (23) f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z};$$

$$(12) f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}; \quad (24) f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2};$$

$$(25) f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z}; \quad (28) f(z) = \frac{z}{1-z^4};$$

$$(26) f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2}; \quad (29) f(z) = z \cos \frac{1}{z};$$

$$(27) f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}; \quad (30) f(z) = \frac{z}{z^2-1};$$

### МАСЕЛЕЛЕР ( № 7 тапшырма )

Төмөндөгү берилген интегралдарды Ресиди түшүнүгүн жардамы менен эсептегиле:

$$1. \int_{|z+i|=1} \frac{zdz}{(z-1)(z^2+1)};$$

$$2. \int_{|z|=1} e^{3/z} dz;$$

$$3. \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3};$$

$$4. \int_{|z|=2} \frac{(z-1)dz}{(z^2+1)^2};$$

$$5. \int_{|z-2|=2} \frac{zdz}{z^4-1};$$

$$6. \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)};$$

$$7. \int_{|z|=1} z \sin^2 \frac{1}{z} dz;$$

$$8. \int_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{z} dz;$$

$$9. \int_{|z|=1} \frac{ctgz dz}{4z - \pi};$$

$$10. \int_{|z|=4} \frac{dz}{z(z+3)};$$

$$11. \int_{|z-1-i|=1} \frac{dz}{z^3 + 1};$$

$$12. \int_{|z-2|=3/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2};$$

$$13. \int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}$$

$$14. \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 - 1};$$

$$15. \int_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2 + 1)};$$

$$16. \int_{|z-2|=3} \frac{e^z dz}{z(z-1)^2};$$

$$17. \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz;$$

$$18. \int_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2 + 3)};$$

$$19. \int_{|z+i|=3/2} \frac{dz}{z + z^3};$$

$$20. \int_{|z|=4} \frac{e^{-z} dz}{(z + \pi i)(z + 5)};$$

$$21. \int_{|z|=3} \frac{(2z-1-i) dz}{(z-1)(z-i)};$$

$$22. \int_{|z-2|=3} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2};$$

$$23. \int_{|z+i|=3} \frac{z dz}{(z+i)(z-3)};$$

$$24. \int_{|z-2|=3} \frac{(z^2 + 1) dz}{z^3 - 3z^2 + 2z};$$

$$25. \int_{|z|=4} \frac{e^{2z} dz}{z - \pi i \theta};$$

$$26. \int_{|z|=5} \frac{chz dz}{(z - \pi i)^2 (z + \frac{\pi i}{2})^2};$$

$$27. \int_{|z-1|=1/3} \frac{sh \pi z dz}{(z-1)(z^2 + 4)^2};$$

$$28. \int_{|z|=5} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z dz}{(z^2 - 1)};$$

$$29. \int_{|z+2|=2} \frac{\cos 2z dz}{z^2 + 3z + 2};$$

$$30. \int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 - 1)^2}$$

## КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999, - 88 с.
2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.
3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.
4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп», 1971, - 120 б.
5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989, - 9,75 п.л.
6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык тендемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007, - 230 б.
7. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1 – 2 – бөлүктөр. – Фрунзе:
8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981, - 464 с.
9. Зельдович Я.Б. Высшая математике для начинающих. – Москва: «Наука», 1970, - 560 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968, - 497 с.
11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1-5– Москва: «УРСС», 2002, - 328 б.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука», 1974, - 450 с.
13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш.. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990, - 100 с.
14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3, - с. 80-81.
15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3, - с. 161-163.
16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1, - с. 74-77.
17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшГУ», 2008, - с. 188-192.
18. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математика боюнча окума (1,2,3 – бөлүктөр). Ош: ОшМУ, 2010, 265 – б. 2011, 336 – б. 2014, 290 б.

19. Атокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008, - 94 б.



Рамиз Рафатов, Авыт Асанов

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ОКУМА

Электрондук окуу китеп

(4 – бөлүк)

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика

кафедрасын 8.02.14, №4 чечими менен

окуу китеби катарында сунушталган.

Чиймелерин сызган К.Х. Абдиваитов.

Көлөмү 257 б.